

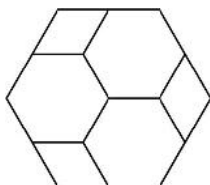
راه حل مسابقه‌ی ریاضی کانکور ۲۰۱۴

راه حل مسئله‌های سه امتیازی

۱. ب. زودترین زمان در حالتی است که اول مارس هم پنج‌شنبه باشد. در این صورت دومین پنج‌شنبه، هشتم و سومین پنج‌شنبه پانزدهم مارس است.
۲. الف. طول هر جعبه برابر است با ۶ — متر.
۳. ه. داریم $16 \leq a \leq 2\pi$ و $4 \leq b \leq 2$ پس $c < b < a$.
۴. الف. عدد وسط دو عدد، همان میانگین‌شان است:

$$\frac{-}{2} - \frac{11}{15}$$

۵. ج. ۲۰۰۹ این خاصیت را دارد.
۶. الف. می‌توانیم شش ضلعی بزرگ را مانند شکل صفحه‌ی بعد تقسیم کنیم. در این شکل، سه شش‌ضلعی هم‌نهشت با شش‌ضلعی کوچک سؤال می‌بینیم.



و سه متوازی الاضلاع. از کنار هم گذاشتن سه متوازی الاضلاع می‌توانیم یک شش‌ضلعی هم‌نهشت با شش‌ضلعی کوچک سؤال بسازیم. پس مساحت شش‌ضلعی بزرگ، چهار برابر شش‌ضلعی کوچک است.

۷. (ب)

۸. (ب) نقطه‌ی برخورد دو قطر مربع، نقطه‌ی وسط هر یک از دو قطر است. پس این نقطه، نقطه‌ی وسط $(-۱, ۰)$ و $(۵, ۰)$ یعنی $(۲, ۰)$ است. همچنین طول دو قطر مربع با هم برابر است، پس این طول برابر ۶ (فاصله‌ی دو نقطه‌ی گفته شده روی محور طول‌ها) است. چون دو قطر بر هم عمودند، پس مؤلفه‌ی اول رأس‌های دیگر، همان مؤلفه‌ی اول نقطه‌ی برخورد قطر‌ها یعنی ۲ است. چون طول قطر برابر ۶ است، پس رأس‌های دیگر $(۲, ۳)$ و $(۲, -۳)$ هستند.

۹. (ه) اگر تعداد مردان، زنان و کودکان این روستا را به ترتیب m ، w و c بنامیم، داریم $\frac{w}{c} = \frac{۲}{۴}$ و $\frac{m}{c} = \frac{۲}{۴}$. پس $w = \frac{۲}{۴}c$ و $m = \frac{۲}{۴}c$ ، بنابراین $m + w = \frac{۵}{۴}c = \frac{۵}{۴} \times ۸c = ۱۰c$ در این روستا برابر $\frac{۴}{۳}$ است.

۱۰. (ج) فرض کنید زمانی که دوباره سوراخ تلمبه‌ها همزمان به پایین‌ترین ارتفاع می‌رسد، چرخ بزرگ m دور کامل و چرخ کوچک n دور کامل چرخیده است. در این صورت چرخ بزرگ مسافتی برابر $۴/۲m$ متر و چرخ کوچک مسافتی برابر $۰/۹n$ متر پیموده است. مسافتی که هر یک از دو چرخ طی کرده‌اند، با هم برابر است. پس داریم

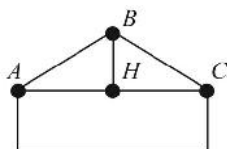
$$۰/۹n = ۴/۲m \Rightarrow n = \frac{۴/۲m}{۰/۹} = \frac{۱۴m}{۳}$$

می‌دانیم n عددی طبیعی است، پس $\frac{14m}{3}$ عددی طبیعی است. کوچک‌ترین عدد طبیعی m که به ازای آن، $\frac{14m}{3}$ عددی طبیعی است برابر ۳ است. پس زمانی که برای اولین بار سوراخ تلمبه‌ها همزمان کم‌ترین ارتفاع را دارند، چرخ بزرگ ۳ دور و چرخ کوچک ۱۴ دور چرخیده است. یعنی هر یک از چرخ‌ها $12,6 = 3 \times 4,2$ متر حرکت کرده‌اند.

راه حل مسئله‌های چهار امتیازی

۱۱. (ج) ۴، ۳۲ و ۶۴ تنها سه عدد به شکل توان دویی هستند که حاصل جمع شان برابر 100° می‌شود.

۱۲. (ج) واضح است که پایین تابلوی $90^\circ \times 120^\circ$ از پایین تابلوی $50^\circ \times 120^\circ$ به زمین نزدیک‌تر است. همچنین پایین تابلوی $100^\circ \times 160^\circ$ از پایین تابلوی $60^\circ \times 160^\circ$ به زمین نزدیک‌تر است. پس کافی است بینیم پایین کدام یک از سه تابلوی $90^\circ \times 120^\circ$ ، $100^\circ \times 160^\circ$ و $40^\circ \times 60^\circ$ به زمین نزدیک‌تر است.



• با توجه به شکل، در تابلوی $90^\circ \times 120^\circ$ فاصله‌ی میخ تا بالای تابلو، برابر است با

$$BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{100^2 - 60^2} = \sqrt{6400} = 80 \text{ cm}$$

پس فاصله‌ی پایین تابلو از زمین برابر است با $80 \text{ cm} - (90^\circ + 80^\circ) = 250^\circ$.

• با توجه به شکل، در تابلوی $100^\circ \times 160^\circ$ فاصله‌ی میخ تا بالای تابلو، برابر است با

$$BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{100^2 - 80^2} = \sqrt{3600} = 60 \text{ cm}$$

پس فاصله‌ی پایین تا بلو از زمین برابر است با 90° cm $(60^\circ + 100^\circ) = 250^\circ$.

• با توجه به شکل صفحه‌ی قبل، در تابلوی $40^\circ \times 60^\circ$ فاصله‌ی میخ تا بالای تابلو، برابر است با

$$BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{100^2 - 30^2} = \sqrt{9100} = 10\sqrt{91} \text{ cm}$$

پس فاصله‌ی پایین تا بلو از زمین برابر است با

$$250^\circ - (10\sqrt{91} + 40) = 210^\circ - 10\sqrt{91} \text{ cm}$$

و داریم

$$9 < \sqrt{91} < 10 \Rightarrow -90^\circ > 10\sqrt{91} > -100^\circ$$

$$\Rightarrow 210^\circ - 90^\circ > 210^\circ - \sqrt{91} > 210^\circ - 100^\circ$$

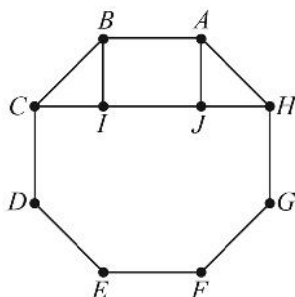
$$\Rightarrow 110^\circ < 210^\circ - \sqrt{91} < 120^\circ$$

پس گزینه‌ی ج درست است.

۱۳. (ب) کم‌ترین زمان در حالتی اتفاق می‌افتد که سه دختری که دستشویی رفتن‌شان ۲۳، ۱۳ و ۱۱ دقیقه طول می‌کشد از یک دستشویی و سه دختر دیگر از دستشویی دیگر استفاده کنند.

۱۴. (د) در هشت ضلعی منتظم صفحه‌ی بعد، از هر یک از دو رأس A و B بر پاره خط CH عمود می‌کنیم. اگر طول BI را برابر x در نظر بگیریم، داریم $CI = AJ = JH = x$ و $CB = x\sqrt{2}$. در این حالت مساحت چهارضلعی $BAHC$ برابر است با

$$x^2 + x^2\sqrt{2} = x^2(1 + \sqrt{2})$$



از طرفی مساحت هشت ضلعی برابر است با

$$\begin{aligned}
 S_{ABCDEFGH} &= S_{ABCH} + S_{CDGH} + S_{DEFG} \\
 &= x^2(1 + \sqrt{2}) + x\sqrt{2}(2x + x\sqrt{2}) + x^2(1 + \sqrt{2}) \\
 &= 2x^2(1 + \sqrt{2}) + x\sqrt{2} \times x\sqrt{2}(1 + \sqrt{2}) \\
 &= 4x^2(1 + \sqrt{2})
 \end{aligned}$$

پس مساحت هشت ضلعی، چهار برابر مساحت ناحیه‌ی خاکستری است، یعنی ۱۲ سانتی متر مربع.

۱۵. (الف) طول دم و بدن تمساح بدون دم و سرش را به ترتیب برابر x و y در نظر می‌گیریم. داریم $\frac{1}{4}(y + 93) = 93$ ، پس $y = 3 \times 93$. از طرفی می‌دانیم $x = \frac{1}{4}(x + y + 93)$ ، پس $x = \frac{1}{4}(x + 4 \times 93)$. بنابراین $3x = x + 4 \times 93$ ، یعنی $x = 2 \times 93$. پس طول بدن تمساح برابر است با $93 + 3 \times 93 + 2 \times 93 = 6 \times 93 = 558$ سانتی متر.

۱۶. (ه) برای این‌که مجموع وجه‌های روبه‌روی هم عددی ثابت باشد، لازم است در وجه روبه‌روی ۳۵ یک عدد اول زوج و در دو وجه روبه‌روی دیگر، دو عدد اول فرد داشته باشیم. چون ۲ تنها عدد اول زوج است، پس باید روی وجه روبه‌روی ۳۵ عدد ۲ نوشته شده باشد. پس مجموع این دو وجه برابر ۳۷ می‌شود. بنابراین روی وجه روبه‌روی ۱۴ باید ۲۳ نوشته شده باشد.

۱۷. (ه) فرض کنید آنهایتا t ساعت دویده و در این مدت، مسافت d کیلومتر را طی کرده است. در این صورت داریم

$$۸ = \frac{d}{t} \Rightarrow d = ۸t$$

همین‌طور اگر او t' ساعت پیاده‌روی کرده باشد، داریم

$$۴ = \frac{۸}{t'} \Rightarrow t' = ۲$$

در این صورت برای این‌که سرعت متوسط او ۵ کیلومتر بر ساعت باشد، داریم

$$۵ = \frac{d + ۸}{t + t'} = \frac{۸t + ۸}{t + ۲} \Rightarrow ۵t + ۱۰ = ۸t + ۸ \Rightarrow ۲ = ۳t \Rightarrow t = \frac{۲}{۳}$$

پس او $\frac{۲}{۳}$ ساعت یا ۴۰ دقیقه دویده است.

۱۸. (ج) اگر تعداد برد، باخت و تساوی‌های این شطرنج‌باز را با x ، y و z نمایش دهیم، داریم

$$x + \frac{z}{۲} = ۲۵$$

پس

$$x = ۲۵ - \frac{z}{۲}$$

از طرفی داریم $x + y + z = ۴۰$ ، پس $۲۵ - \frac{z}{۲} + y + z = ۴۰$ ، یعنی

$$x - y = ۲۵ - \frac{z}{۲} - (۱۵ - \frac{z}{۲}) = ۱۰ \text{ در نتیجه } y = ۱۵ - \frac{z}{۲}$$

۱۹. (الف) اگر قیمت هر کلاه برابر x یورو باشد، این سه نفر برای خرید سه کلاه،

روی هم $\frac{۴۷x}{۶۰} = \frac{x}{۳} + \frac{x}{۴} + \frac{x}{۵}$ یورو پول کم دارند. پس

$$۹,۴ = \frac{۴۷x}{۶۰} \Rightarrow x = ۱۲$$

۲۰. (ج) داریم

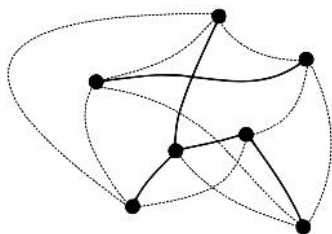
$$p + \frac{1}{q + \frac{1}{r}} = \frac{25}{19} \Rightarrow p + \frac{r}{qr + 1} = \frac{25}{19} \Rightarrow \frac{p(qr + 1) + r}{qr + 1} = \frac{25}{19}$$

پس $p(qr + 1) + r = 25n$ و $qr + 1 = 19n$ که در آن n عددی طبیعی است. از رابطه‌ی $qr + 1 = 19n$ نتیجه می‌شود $qr + 1$ بر n بخش‌پذیر است. پس با توجه به رابطه‌ی $p(qr + 1) + r = 25n$ هم باید بر n بخش‌پذیر باشد. در این صورت هم $qr + 1$ و qr هم بر n بخش‌پذیرند، پس اختلافشان یعنی ۱ هم بر n بخش‌پذیر است، یعنی n برابر ۱ است. پس $qr + 1 = 19$ ، یعنی $qr = 18$. همین‌طور داریم $p(qr + 1) + r = 18p + r = 25$. بنابراین p نمی‌تواند بزرگ‌تر از ۱ باشد، چون در آن صورت r منفی می‌شود. پس $p = 1$ ، در نتیجه $pqr = 18$.

راه‌حل مسئله‌های پنج امتیازی

۲۱. (د) با توجه به این‌که $11 \times 3 \times 1 = 33$ ، هر یک از حرف‌های N و U یا برابر ۱ هستند یا ۳ و داریم $M + B + E + R = 11$. هر یک از حرف‌های M, B, E و R می‌توانند برابر یکی از عددهای ۲، ۴، ۶ باشند، پس دو حالت برای مقدار N و U و $24 = 1 \times 2 \times 3 \times 4$ حالت برای مقدار M, B, E و R داریم. پس در کل معادله ۴۸ جواب مختلف دارد.

۲۲. (د) به یکی از نقطه‌های شکل، سه پاره‌خط وصل است. پس ابتدا باید تلاش کنیم تعدادی پاره‌خط اضافه کنیم به طوری که به هر نقطه سه پاره‌خط وصل باشد. اما پس از تلاش مان متوجه می‌شویم که این کار امکان ندارد، حتماً یا به یک نقطه دو پاره‌خط یا به یک نقطه، چهار پاره‌خط وصل می‌شود. این بار تلاش می‌کنیم تعداد دیگری پاره‌خط به شکل اضافه کنیم به طوری که به هر نقطه چهار پاره‌خط وصل باشد. برای این کار لازم است ۹ پاره‌خط اضافه کنیم (شکل صفحه‌ی بعد را ببینید).



۲۳. (د) در ردیف پایین مکعب ۵ مکعب حتماً سفیدند. در ردیف وسط، حتماً ۶ تا سفیدند و در ردیف بالا هم ۷ تا سفیدند. پس حداکثر $9 = (5 + 6 + 7) - 27$ تا از مکعب‌ها سیاه‌اند.

۲۴. (ب) قبل از اتفاق تعداد قورباغه‌های سبز و آبی را با s و a و همچنین بعد از اتفاق تعداد قورباغه‌های سبز و آبی را با s' و a' نمایش می‌دهیم. داریم

$$s' = 1/6s \text{ و } a' = 1/4a, \text{ همچنین}$$

$$\frac{s'}{a'} = \frac{a}{s} \Rightarrow aa' = ss' \Rightarrow a \times 1/4a = s \times 1/6s \Rightarrow a^2 = 4s^2$$

$$\Rightarrow a = 2s$$

بنابراین

$$\frac{s' + a'}{s + a} = \frac{1/6s + 1/4a}{s + a} = \frac{1/6s + 1/8s}{s + 2s} = \frac{2/8s}{3s} = 1/8s$$

پس تعداد کل قورباغه‌ها ۲۰ درصد کاهش یافته است.

۲۵. (ج) بیش‌ترین تعداد عددها در حالتی اتفاق می‌افتد که حداکثر یک عدد مضرب ۳ نوشته شده باشد. بین عددهای کوچک‌تر از 100 ، دقیقاً ۳۳ عدد مضرب ۳ وجود دارد، پس ۳۲ تا از این عددها را نباید نوشته باشد، یعنی حداکثر می‌تواند ۶۸ عدد نوشته باشد.

۲۶. (ب) برای این‌که سه رأس روی یک وجه نباشند، حتماً باید یکی از ضلع‌های مثلث، یکی از قطرهای مکعب (پاره‌خطی که دو رأس مکعب با بیش‌ترین فاصله

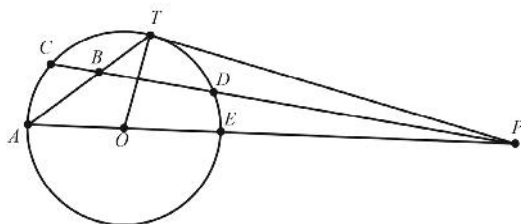
را به هم وصل می‌کند) باشد. مکعب چهار قطر دارد، بعد از انتخاب یکی از قطرها، هریک از ۶ رأس دیگر مکعب را که به عنوان رأس سوم مثلث انتخاب کنیم، شرط مسئله برقرار است. پس این کار را به $24 = 4 \times 6$ حالت مختلف می‌توان انجام داد.

۲۷. (ب) با توجه به شکل زیر داریم

$$\begin{aligned} \angle TPB = \angle BPA &\Rightarrow \frac{CT - TD}{2} = \frac{CA - DE}{2} \\ &\Rightarrow \frac{CA + TD}{2} = \frac{CT + DE}{2} \end{aligned}$$

از طرفی

$$\frac{CA + TD}{2} + \frac{CT + DE}{2} = 90^\circ$$



$$\angle TBP = \frac{CA + TD}{2} = 45^\circ \text{ پس}$$

۲۸. (د) از بین عددهای ۷ رقمی با شرایط گفته شده در مسئله:

تعداد آن‌هایی که با رقم ۱ شروع می‌شوند = تعداد آن‌هایی که با رقم ۷ شروع می‌شوند.

تعداد آن‌هایی که با رقم ۲ شروع می‌شوند = تعداد آن‌هایی که با رقم ۶ شروع می‌شوند.

تعداد آن‌هایی که با رقم ۳ شروع می‌شوند = تعداد آن‌هایی که با رقم ۵ شروع می‌شوند.

پس عدد وسط، با رقم ۴ شروع می‌شود. از بین عددهایی با شرایط مسئله که با رقم ۴ شروع می‌شوند:

تعداد آن‌هایی که رقم دومشان از سمت چپ ۱ است = تعداد آن‌هایی که رقم دومشان از سمت چپ ۷ است.

تعداد آن‌هایی که رقم دومشان از سمت چپ ۲ است = تعداد آن‌هایی که رقم دومشان از سمت چپ ۶ است.

تعداد آن‌هایی که رقم دومشان از سمت چپ ۳ است = تعداد آن‌هایی که رقم دومشان از سمت چپ ۵ است.

پس رقم دوم از سمت چپ عدد خواسته شده ۳ است. از بین عددهایی با شرایط مسئله که رقم اول آن‌ها ۴ و رقم دوم آن‌ها ۳ است:

تعداد آن‌هایی که رقم سومشان از سمت چپ ۱ است = تعداد آن‌هایی که رقم سومشان از سمت چپ ۷ است.

تعداد آن‌هایی که رقم سومشان از سمت چپ ۲ است = تعداد آن‌هایی که رقم سومشان از سمت چپ ۶ است.

پس رقم سوم عدد خواسته شده ۵ است. رقم‌های دیگر عدد را هم می‌توان با استدلالی مشابه به دست آورد. ولی عدد ۴۳۵۲۶۱۷ تنها گزینه‌ای است که سه رقم اولش درست است.

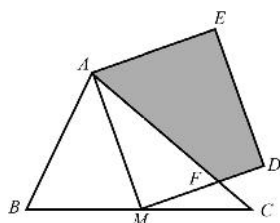
۲۹. (ب) با توجه به قضیه‌ی فیثاغورس، مثلث ABC قائم‌الزاویه است. در مثلث‌های قائم‌الزاویه، طول میانه برابر نصف طول وتر است، پس $AM = 5$. از طرفی $AM = MC$ ، پس $\angle MAC = \angle ACM$. بنابراین دو مثلث

قائم الزاویه ABC و AMF با هم متشابه‌اند. پس داریم

$$\frac{MF}{AB} = \frac{AM}{AC} \Rightarrow \frac{MF}{6} = \frac{5}{8} \Rightarrow MF = \frac{15}{4}$$

پس

$$S_{AEDF} = S_{AEDM} - S_{AFM} = 25 - \frac{1}{2} \times \frac{15}{4} \times 5 = \frac{125}{8}$$



۳۰. (ج) نفر اول از سمت چپ حتماً دروغگو است، زیرا تعداد دروغگوهای

سمت چپش صفر است و صفر از هیچ عدد حسابی‌ای بزرگ‌تر نیست.

نفر ۱۴م از سمت چپ حتماً راستگو است. چون تعداد راستگوهای سمت

راستش برابر صفر است و دست‌کم یک دروغگو (نفر اول) در سمت چپش

وجود دارد. حالا این دو نفر را کنار بگذاریم؛ اگر قبل از این کار، یک نفر

جمله‌ی راست گفته باشد، پس از این کار هم جمله‌اش راست خواهد ماند

و برعکس. پس با استدلال مشابهی نفر سمت چپی دروغگو، و نفر سمت

راستی راستگو است. با تکرار این روند نتیجه می‌شود ۱۰۰۷ نفر سمت چپ

دروغگو، و ۱۰۰۷ نفر سمت راست، راستگو هستند.