

راه حل مسئله‌های ریاضیات کانگورو ۱۳۹۴

اول دبیرستان

پاسخ مسئله‌های سه امتیازی

۱. (۲) $20 \times 50 = 1000$

۲. (۵) اگر تعداد بلوزها n باشد، باید $n + (n - 1) = 29$ و در نتیجه $n = 15$.

۳. (۲) توجه کنید که تکه‌ی خاکستری پایین را می‌توانیم نصف کنیم و کناره‌های خالی نیم‌دایره را پر کنیم.

۴. (۵)

	کل	سومی	دومی	اولی
پول	۱۵۰۰۰	۲۰۰۰	۵۰۰۰	۸۰۰۰
کلوچه	۳۰	۴	۱۰	۱۶

پس خواهر اولی باید $16 - 10 = 6$ کلوچه‌ی دیگر بگیرد.

۵. (۲)

۶. (۳)

۷. (۵) فرض کنید P و C به ترتیب مجموعه‌ی دانش‌آموزهایی است که به فیزیک و ریانه علاقه دارند. در این صورت، باید

$$۳۳ = n(P \cup C) = n(P) + n(C) - ۳$$

و در ضمن

$$n(C) - ۳ = ۲(n(P) - ۳);$$

پس

$$\begin{cases} n(P) + n(C) = ۳۶ \\ ۲n(P) - n(C) = ۳ \end{cases}$$

در نتیجه $n(C) = ۲۳$.

۸. (۱)

۹. (۴)

$$۱۰۰ + \left\lfloor \frac{۱۰۰}{۷} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{۱۰۰}{۴۹} \right\rfloor = ۱۱۶$$

۱۰. (۲)

پاسخ مسئله‌های چهار امتیازی

۱۱. (۲) سه وجه از تاس باید «بله» باشد (به جهت «بله»ها و «نه»ها دقت کنید!).

۱۲. (۳)

۱۳. (۳) فرض کنید تعداد گوش‌های ایمی، دیمی و سیمی به ترتیب a و b و c است. در این صورت

$$\begin{cases} b + c = ۸ \\ a + c = ۷ \\ a + b = ۵ \end{cases}$$

پس $c = ۵$.

۱۴. (۱) وقتی مکعب کاملاً زیر آب برود، ارتفاع آب به $\frac{۱۰۰h + ۸}{۱۰۰}$ می‌رسد. این ارتفاع نباید از ۲ کمتر باشد؛ پس باید $h \geq ۱/۹۲ \text{ cm}$.

۱۵. (۲) توجه کنید که چهارضلعی $EFGH$ مربع است. چون $AB = \sqrt{8}^\circ$ و $AE = 3\sqrt{5}$ باید $EB = \sqrt{5}$ و $AE = 3EB$ ؛ پس

مساحت $EFGH$ که برابر است با EH^2 برابر است با $5^\circ = (\sqrt{5})^2 + (3\sqrt{5})^2$ و در نتیجه، مساحت ناحیه‌ی سایه‌خورده برابر است با

$$5^\circ \div 2 = 25$$

۱۶. (۴) چون $31 \times 13 \times 5 = 2015$ ، سن پدر ۶۵ سال است و سن پسر ۳۱ سال.

۱۷. (۴)

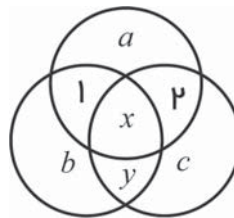
۱۸. (۲) حاصل جمع دو ریشه برابر است با ۸۵؛ پس یکی از دو ریشه ۲ است و دیگری ۸۳ و در نتیجه $c = 166$.

۱۹. (۴)

۲۰. (۵) ۳۷ اول است؛ اما نه ۳۵ اول است و نه ۳۹.

پاسخ مسئله‌های پنج امتیازی

۲۱. (۱) شکل زیر را در نظر بگیرید.



می‌دانیم که

$$y = b + c + x = (1 + y) + (2 + y) + x;$$

پس $x + y = -3$. از طرفی $x = 1 + 2 + y$ ؛ پس $x = 0$.

۲۲. (۲) فرهنگ‌ها را باهم بسته‌بندی می‌کنیم و رمان‌ها را باهم. تعداد حالت‌های مختلف چیدن برابر است با

(جابه‌جایی بسته‌ها) \times (جابه‌جایی در بسته‌ی رمان) \times (جابه‌جایی در بسته‌ی فرهنگ)

$$= 3! \times 2! \times 2! = 24$$

۲۳. (۳) فقط دو عدد:

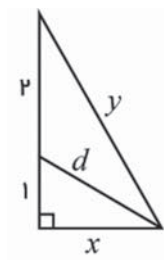
$$۲^۰ + ۲^۱ + ۲^۲ + ۲^۳ + ۲^۴ + ۲^۵ = ۶۳$$

$$۲^۰ + ۲^۱ + ۲^۲ + ۲^۳ + ۲^۴ + ۲^۶ = ۹۵$$

۲۴. (۴) نسبت مساحت مثلث بالایی به کل مثلث برابر است با $\frac{BY^2}{BA^2}$ و نسبت مساحت ذوزنقه‌ی پایینی به کل مثلث برابر است با $۱ - \frac{BX^2}{BA^2}$.

$$\text{چون } \frac{BX}{XA} = \frac{۴}{۱} \text{ باید } \frac{BX}{BA} = \frac{۴}{۵} \text{ و در نتیجه } \frac{BY}{BA} = \frac{۳}{۵} \text{؛ پس } \frac{BY}{YA} = \frac{۳}{۲}$$

۲۵. (۳) شکل زیر را در نظر بگیرید.



$$\text{می‌دانیم که } \frac{y}{۲} = \frac{x}{۱} \text{ و } x^2 + ۳^2 = y^2 \text{؛ پس } x = \sqrt{۳} \text{ و در نتیجه } d = ۲$$

۲۶. (۱)

۲۷. (۲) فرض کنید عدد حذف شده i است. در این صورت

$$\frac{\frac{1}{2}n(n-1) - i}{n-1} = ۴٫۸$$

یا

$$\frac{n}{۲} - \frac{i}{n-1} = ۴٫۸$$

$$\text{اگر } i = n \text{ آنگاه باید } \frac{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)}{n-1} = ۴٫۸ \text{ که ممکن نیست؛ پس } i < n \text{ و در نتیجه } ۱ \leq \frac{i}{n-1} < ۰ \text{؛ پس}$$

$$\frac{n}{۲} - ۱ \leq \frac{n}{۲} - \frac{i}{n-1} < \frac{n}{۲}$$

و در نتیجه

$$\frac{n}{۲} - ۱ \leq ۴٫۸ < \frac{n}{۲}$$

پس $۱۱ \leq n \leq ۱۰$. اگر $n = ۱۰$ آنگاه باید $۴٫۸ = ۵ - \frac{i}{۹}$ که نتیجه می‌دهد $i = ۱٫۸$ که ممکن نیست. اگر $n = ۱۱$ آنگاه باید

$$۴٫۸ = ۵٫۵ - \frac{i}{۱۰} \text{ که یعنی } i = ۷$$

۲۸. (۴)

۲۹. (۲) فرض کنید ده عدد متمایز x_1, \dots, x_{10} داده شده‌اند و

$$x_1 = x_2 \times \dots \times x_{10}, \quad x_{10} = x_1 \times \dots \times x_9$$

در این صورت $x_1^2 = x_{10}^2$ ؛ پس $x_1 = \pm x_{10}$ که یعنی $x_1 = -x_{10}$ و در نتیجه، هیچ x_i دیگری با این خاصیت وجود ندارد. برای ساختن

مثالی با این خاصیت، کافی است x_2, \dots, x_9 را طوری انتخاب کنیم که حاصل ضربشان برابر ۱- باشد.

۳۰. (۲)