

آزمون ورودی دبیرستان سازمان انرژی اتمی ایران

خرداد ۱۳۸۹

زمان پاسخ‌گویی ۱۲۰ دقیقه

۱- فرض کنید $P = 2^m$ و $Q = 3^n$. کدام یک از عبارت‌های زیر برابر 12^{mn} است؟

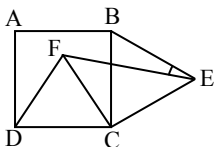
- (۱) $P^m Q$ (۲) $P^n Q^m$ (۳) $P^m Q^n$ (۴) $P^{mn} Q^m$

$$\frac{0. / 125 - 2 \div (-\frac{2}{3} + \frac{2}{9} \times 2)}{\frac{1}{6} + \frac{5}{24}} = ?$$

۲- حاصل کسر روبه‌رو کدام است؟

- (۱) $\frac{45}{8}$ (۲) $\frac{73}{3}$ (۳) $-\frac{73}{3}$ (۴) $-\frac{45}{8}$

۳- در شکل روبه‌رو، چهارضلعی ABCD مربع و دو مثلث BEC و FDC متساوی‌الاضلاع هستند. زاویه BEF چند درجه است؟



- (۱) ۱۰
(۲) ۱۵
(۳) ۲۲/۵
(۴) ۳۰

۴- نقاط A و B با مختصات $\begin{bmatrix} 3 \\ m \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 7 \\ -1 \end{bmatrix}$ مفروض‌اند. از وسط پاره خط AB، خط d را موازی خط به معادله $2x = y - 4$ رسم می‌کنیم. اگر عرض از مبدأ خط d، -۵ باشد، آن‌گاه مقدار m چقدر است؟

- (۱) ۲۱ (۲) ۱۹ (۳) ۹ (۴) ۱۱

۵- آقای احمدی راننده اتوبوس است و مسیر تهران تا رشت را در ۶ ساعت می‌پیماید. آقای سعیدی، کمک راننده اتوبوس، همین مسیر را در ۸ ساعت می‌پیماید. آن‌ها از تهران حرکت می‌کنند و پس از طی مسافتی آقای احمدی می‌خواهد و اتوبوس را آقای سعیدی می‌راند. آقای احمدی با رسیدن به رشت بیدار می‌شود و متوجه می‌گردد که روی هم $7\frac{1}{3}$ ساعت در راه بوده‌اند. او چند ساعت خوابیده است؟

- (۱) $5\frac{1}{3}$ (۲) $2\frac{2}{15}$ (۳) $4\frac{2}{3}$ (۴) ۶

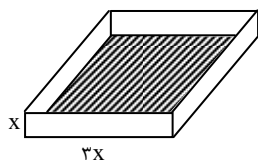
۶- کلاسی ۳۰ دانش‌آموز دارد و میانگین نمرات درس ریاضی ۱۰ دانش‌آموز ضعیف‌تر کلاس برابر ۱۲ شده است. اگر این ۱۰ نفر را از کلاس حذف کنیم، میانگین نمرات درس ریاضی کلاس ۲ نمره افزایش می‌یابد. میانگین نمرات ریاضی کلاس در ابتدا چقدر بوده است؟

- (۱) ۱۴ (۲) ۱۵ (۳) ۱۶ (۴) ۱۷

۷- مجموعه $A = \{x^y \mid x, y \in Z, xy = 8\}$ چند عضو دارد؟

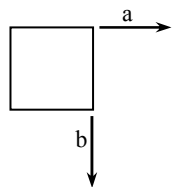
- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸

- ۸- می‌خواهیم یک جعبه‌ی شیرینی در باز بسازیم. کف جعبه از یک مقوای مربع شکل به ضلع $3X$ تشکیل شده و دیواره‌های جعبه به اندازه‌ی X واحد ارتفاع دارند. برای ساختن این جعبه از مقوایی مستطیل شکل به طول و عرض $5X$ و $6X$ استفاده می‌کنیم. چه سطحی از مقوا بدون استفاده باقی می‌ماند؟



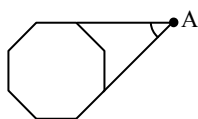
- (۱) صفر
(۲) $15X^2$
(۳) $9X^2$
(۴) $6X^2$

- ۹- در شکل روبه‌رو مربعی به ضلع ۲ واحد رسم شده است. دو بردار a و b با اندازه‌ی ۲ واحد و موازی با دو ضلع مربع مفروض‌اند. مربع را ابتدا با بردار a انتقال می‌دهیم و سپس شکل انتقال یافته را با بردار b دوباره منتقل می‌کنیم. فاصله‌ی بین دورترین نقطه‌ها روی مربع نهایی و مربع اولیه چقدر است؟



- (۱) $2\sqrt{13}$
(۲) $4\sqrt{2}$
(۳) ۴
(۴) $2\sqrt{5}$

- ۱۰- دو تا از اضلاع یک هشت ضلعی منتظم را امتداد داده‌ایم تا با یکدیگر در نقطه‌ی A برخورد کنند. زاویه‌ی A چند درجه است؟



- (۱) ۳۰
(۲) ۶۰
(۳) $67/5$
(۴) ۴۵

- ۱۱- اگر جای رقم‌های یکان و صدگان یک عدد سه‌رقمی را با هم عوض کنیم، به مقدار آن ۷۹۲ واحد اضافه می‌شود. اگر عدد اولیه مضرب ۹ باشد، رقم دهگان آن چقدر است؟

- (۱) ۶
(۲) ۷
(۳) ۸
(۴) ۹

$$\frac{1 \times 2 \times 3 + 2 \times 4 \times 6 + 3 \times 6 \times 9 + \dots + 1300 \times 2600 \times 3900}{3 \times 4 \times 5 + 6 \times 8 \times 10 + 9 \times 12 \times 15 + \dots + 3900 \times 5200 \times 6500} = ?$$

- ۱۲- حاصل کسر مقابل در ساده‌ترین حالت کدام است؟

- (۱) $\frac{9}{25}$
(۲) $\frac{1}{10}$
(۳) $\frac{3}{20}$
(۴) $\frac{3}{25}$

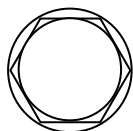
- ۱۳- دو لیست از اعداد داریم که در هر کدام اعداد با نظم خاصی مرتب شده‌اند. عدد ۵۱ اولین عدد مشترک دو لیست است. عدد مشترک بعدی کدام است؟

۲۷, ۳۹, ۵۱, ۶۳, ۷۵, ...

-۱۲, ۹, ۳۰, ۵۱, ۷۲, ...

- (۱) ۳۰۳
(۲) ۱۱۴
(۳) ۱۳۵
(۴) ۱۲۳

- ۱۴- رضا یک شش ضلعی منتظم به ضلع ۲ را در نظر می‌گیرد و دو دایره برای آن رسم می‌کند، یکی داخل شش ضلعی که بر اضلاع آن مماس است و دیگری خارج شش ضلعی که از رأس‌های آن می‌گذرد. او مساحت ناحیه‌ی بین دو دایره را A می‌نامد. اشکان همین کار را برای یک هفت ضلعی منتظم به ضلع ۲ انجام می‌دهد و مساحت بین دو دایره‌ی هفت ضلعی را B می‌نامد. A چند برابر B است؟



- (۱) ۱
(۲) $\frac{6}{7}$
(۳) $\frac{36}{49}$
(۴) $\frac{7}{6}$

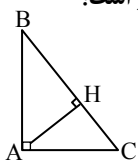
- ۱۵- یک دامدار تعدادی گوسفند و مرغ دارد. او تعداد گوسفندهای خود را ۳ برابر و تعداد مرغ‌های خود را نصف می‌کند و می‌بیند که تعداد پاهای حیوانات روی هم دو برابر می‌شود. تعداد اولیه‌ی گوسفندها چند برابر تعداد اولیه‌ی مرغ‌ها بوده است؟

- (۱) $\frac{3}{4}$
(۲) ۳
(۳) $\frac{1}{3}$
(۴) $\frac{4}{3}$

- ۱۶- از اعداد a و b تا دو رقم اعشار جذر گرفته‌ایم و به ترتیب اعداد $50/11$ و $50/31$ را به دست آورده‌ایم. اختلاف a و b تقریباً چقدر است؟

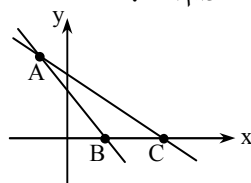
- (۱) ۲۰
(۲) $20/1$
(۳) $20/2$
(۴) $20/3$

- ۱۷- در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC ارتفاع وارد بر وتر را رسم کرده‌ایم. اگر $\frac{AB}{AC} = x$ و $\frac{BH}{HC} = y$ ، آن‌گاه چه رابطه‌ای بین x و y برقرار است؟



- (۱) $y = x^2$
(۲) $y = x$
(۳) $y^2 = x$
(۴) $y = \frac{1}{x}$

- ۱۸- در شکل روبه‌رو دو خط با شیب‌های ۱- و ۲- یکدیگر را در نقطه‌ی A با مختصات $\begin{bmatrix} -1 \\ 12 \end{bmatrix}$ قطع کرده‌اند. مساحت مثلث ABC کدام است؟



- (۱) ۳۶
(۲) ۴۸
(۳) ۶۰
(۴) ۷۲

۱۹- اگر $A = x + 1$ و $B = x^4 - 1$ ، آن گاه حاصل $B - A(xA^2 - 3x^2)$ کدام است؟

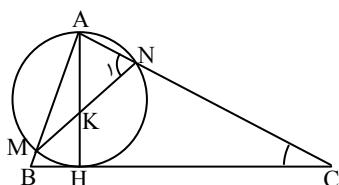
- (۱) صفر (۲) A (۳) $B + A$ (۴) $-A$

۲۰- ۴۰ گرم محلول آب و الکل با غلظت ۲۰٪ الکل را با محلول دیگری با غلظت ۴۳٪ الکل مخلوط می‌کنیم. اگر محلول نهایی با غلظت ۳۰٪ الکل باشد، جرم آن

چند گرم است؟

- (۱) ۶۳ (۲) ۶۶ (۳) ۷۰ (۴) ۸۵

۲۱- در شکل روبه‌رو، پاره‌خط AH قطر دایره‌ای است که بر ضلع BC مماس است. اگر $\hat{C} = 30^\circ$ و $\hat{N}_1 = 60^\circ$ ، آن گاه نسبت $\frac{AK}{KM}$ چقدر است؟



- (۱) ۲
(۲) $\sqrt{3}$
(۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
(۴) ۱

۲۲- عدد $1000...064$ را به ضرب عوامل اول آن تجزیه می‌کنیم. توان عدد ۲ در این تجزیه چند است؟

- (۱) ۶ (۲) ۱۳۹۰ (۳) ۱۳۹۱ (۴) ۱۳۹۶

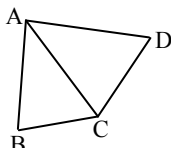
۲۳- سه‌رابط برای پیدا کردن اعداد اول بین ۱ تا n از الگوریتم غربال اراتستن استفاده می‌کند. او پس از خط زدن عددی مطمئن می‌شود که تمامی اعداد اول را یافته است. کدام گزینه می‌تواند این آخرین عدد خط خورده باشد؟

- (۱) ۱۰۰ (۲) ۱۲۹ (۳) ۱۸۷ (۴) ۱۴۳

۲۴- در بین اعداد گزینه‌های زیر، کدام عدد از بقیه بزرگ‌تر است؟

- (۱) 10^{-6} (۲) 3^{-12} (۳) 2^{-18} (۴) 5^{-9}

۲۵- در شکل روبه‌رو طول قطر AC از چهارضلعی $ABCD$ برابر ۱۲ واحد است و می‌دانیم $AB^2 - BC^2 = AD^2 - DC^2 = 48$. اگر نقطه‌ی K محل برخورد قطرهای چهارضلعی باشد، طول CK چقدر است؟



- (۱) ۴
(۲) $\frac{11}{2}$
(۳) ۵
(۴) $\frac{13}{2}$

۲۶- در جمع ۶ نفره‌ی علی، آرش، سینا، حمید، پویا و پارسا؛ علی و آرش با همه دوست‌اند. همچنین سینا، حمید و پویا به ترتیب ۴، ۳ و ۲ دوست دارند. پارسا با چند نفر از این جمع دوست است؟ (توجه کنید که کسی با خودش دوست نیست!)

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۲۷- اگر به حاصل جمع سه عدد طبیعی متوالی، ۵ برابر بزرگ‌ترین عدد را بیفزاییم، حاصل ۳ واحد بیش‌تر از دو برابر مربع کوچک‌ترین عدد می‌شود. کوچک‌ترین عدد کدام است؟

- (۱) ۷ (۲) ۶ (۳) ۵ (۴) ۴

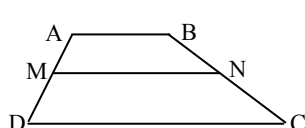
۲۸- باقی‌مانده‌ی عددی در تقسیم بر ۷ برابر ۵ و در تقسیم بر ۸ برابر ۶ است. باقی‌مانده‌ی این عدد در تقسیم بر ۵۶ کدام است؟

- (۱) ۳۰ (۲) ۴۰ (۳) ۳۳ (۴) ۵۴

۲۹- اگر حاصل جمع روبه‌رو را A بنامیم، آن گاه مجموع ارقام A کدام است؟

$$A = 1 + 11 + 101 + 1001 + 10001 + \dots + \underbrace{1000\dots001}_{50 \text{ تا صفر}}$$

- (۱) ۵۷ (۲) ۵۸ (۳) ۵۹ (۴) ۱۰۳



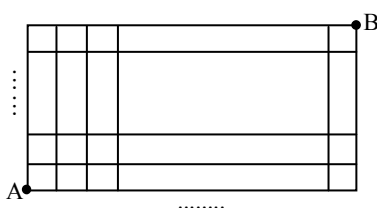
۳۰- در شکل روبه‌رو پاره‌خط MN را موازی قاعده‌های دوزنقه‌ی $ABCD$ رسم کرده‌ایم. می‌دانیم $\frac{AM}{MD} = \frac{1}{2}$

و $\frac{AB}{DC} = \frac{1}{3}$. نسبت مساحت دوزنقه‌ی $ABNM$ به دوزنقه‌ی $MNCD$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{4}{7}$ (۳) $\frac{2}{7}$ (۴) $\frac{1}{2}$

۳۱- بین اعداد 1001 و $1 - 2^{15}$ چند عدد مکعب کامل وجود دارد؟

- (۱) ۲۳ (۲) ۲۲ (۳) ۲۱ (۴) ۲۰

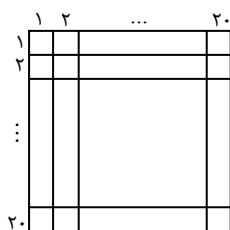


۳۲- یک مستطیل به طول ۲۴۰ و عرض ۷۲ واحد را با خطوط افقی و عمودی به مربع‌های 1×1 تقسیم کرده‌ایم. هر کدام از نقاط برخورد این خط‌ها در داخل مستطیل را یک «نقطه‌ی شبکه‌ای» می‌نامیم. اگر قطر AB مستطیل را رسم کنیم، چند نقطه‌ی شبکه‌ای روی آن قرار دارد؟

- (۱) ۲۲ (۲) ۲۳ (۳) ۲۴ (۴) ۲۵

۳۳- عدد $18 \times 20!$ بر 12^k بخش‌پذیر است. بیش‌ترین مقدار k کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۱۰ (۴) ۱۱



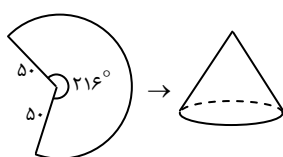
۳۴- یک جدول 20×20 را مطابق شکل در نظر بگیرید که سطرها و ستون‌های آن را شماره گذاشته‌ایم. خانه‌های زیر را از جدول رنگ می‌کنیم:

- تمام خانه‌های سطرهاى دوم، پنجم، نهم و هفدهم
 - تمام خانه‌های ستون‌های پنجم، دهم، دوازدهم، چهاردهم و هفدهم
 - تمام خانه‌های روی قطر اصلی (قطری که خانه‌ی واقع در سطر و ستون اول را به خانه‌ی واقع در سطر و ستون بیستم وصل می‌کند)
- روی هم چند خانه از جدول رنگ شده‌اند؟

- (۱) ۱۷۱ (۲) ۱۷۳ (۳) ۱۷۸ (۴) ۱۸۰

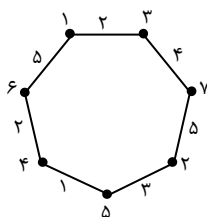
۳۵- عدد $2^4 \times 100 \times 3^7$ چند مقسوم‌علیه دارد که هر کدام یک مربع کامل باشند؟

- (۱) ۲۴ (۲) ۱۰۵ (۳) ۳۲ (۴) ۱۴۷



۳۶- ترانه می‌خواهد یک کلاه قیفی شعبده‌بازی درواز بسازد و توی آن را پر از خرده کاغذ رنگی کند تا با برداشتن آن برادرزاده‌ی کوچک خود را خوشحال کند. او برای این کار از مقوا یک قطاع دایره‌ای به شعاع ۵۰ سانتی‌متر و زاویه‌ی 216° می‌برد و آن را به شکل مخروط درواز جمع می‌کند. مقدار کاغذ رنگی‌های داخل کلاه تقریباً چند سانتی‌متر مکعب است؟ ($\pi \approx 3$)

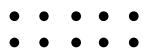
- (۱) ۱۰۸۰۰۰ (۲) ۴۵۰۰ (۳) ۷۵۰۰۰ (۴) ۳۶۰۰۰



۳۷- روی رأس‌های یک هفت ضلعی اعداد ۱ تا ۷ با ترتیبی دلخواه نوشته شده‌اند. روی هر ضلع تفاضل اعداد دو سر این ضلع را می‌نویسیم. فرض کنید بزرگ‌ترین عدد در بین اعداد نوشته شده روی اضلاع برابر a باشد. به عنوان مثال در شکل زیر a برابر ۵ است. کم‌ترین مقدار ممکن a چند است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۳۸- چند مثلث به مساحت واحد می‌توان یافت به طوری که رئوس آن متعلق به نقاط شکل زیر باشد؟ (فاصله‌ی نقاط افقی و عمودی مجاور در این شکل برابر ۱ واحد است.)



- (۱) ۴۰ (۲) ۳۰ (۳) ۲۰ (۴) ۱۵

۳۹- در یک بازی، فرهاد عددی به آرش می‌گوید و او سعی می‌کند که با گذاشتن علامت‌های مثبت و منفی در دایره‌های زیر، حاصل عبارت را برابر عدد فرهاد کند. به ازای هر موفقیت آرش یک امتیاز کسب می‌کند. فرهاد به ترتیب عددهای ۲، ۳ و ۴ را به آرش می‌گوید. بیش‌ترین امتیازی که آرش می‌تواند کسب کند چقدر است؟

$$10203040506 = ?$$

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر

۴۰- میوه‌فروشی تعدادی وزنه دارد و ادعا می‌کند که با این وزنه‌ها می‌تواند هر عدد طبیعی تا ۵۰ کیلوگرم را وزن کند (او میوه‌ها را در یک کفه‌ی ترازو و وزنه‌ها را در کفه‌ی دیگر می‌گذارد). میوه‌فروش هم‌چنین ادعا می‌کند که با کمک «بحث مبنا» کم‌ترین تعداد وزنه‌ی ممکن را برای این کار در نظر گرفته است. او چند وزنه دارد؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

آزمون ورودی

پاسخ‌های تشریحی

۱- گزینه‌ی (۴)

در داخل ۱۲^{mn} ، توان‌های ۲ و ۳ را تفکیک می‌کنیم:

$$۱۲^{mn} = (۲^۲ \times ۳)^{mn} = ۲^{2mn} \times ۳^{mn} = (۲^m)^{2n} \times (۳^n)^m = P^{2n} \times Q^m$$

۲- گزینه‌ی (۲)

$$\frac{۰/۱۲۵ - ۲ \div (-\frac{۲}{۳} + \frac{۲}{۹} \times ۲)}{\frac{۱}{۶} + \frac{۵}{۲۴}} = \frac{\frac{۱}{۸} - ۲ \div (-\frac{۶}{۹} + \frac{۴}{۹})}{\frac{۴+۵}{۲۴}} = \frac{\frac{۱}{۸} - ۲ \times \frac{-۹}{۲}}{\frac{۳}{۸}} = \frac{\frac{۷۳}{۸}}{\frac{۳}{۸}} = \frac{۷۳}{۳}$$

۳- گزینه‌ی (۲)

با توجه به مربع بودن ABCD و مثلث‌های متساوی‌الاضلاع نتیجه می‌گیریم $\hat{FCB} = ۳۰^\circ$ و $\hat{BCE} = ۶۰^\circ$ ، پس $\hat{FCE} = ۹۰^\circ$. از طرفی چون $CE = BC$ و $FC = BC$ ، نتیجه می‌گیریم $FC = CE$ ، پس مثلث FCE قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین است. در نتیجه $\hat{CEF} = ۴۵^\circ$ ، بنابراین: $\hat{BEF} = ۶۰^\circ - ۴۵^\circ = ۱۵^\circ$

۴- گزینه‌ی (۴)

خطی که موازی خط $۲x = y - ۴$ رسم می‌شود شیب ۲ دارد و چون عرض از مبدأ آن -۵ است، معادله‌ی خط d، معادله‌ی $y = ۲x - ۵$ است.

خط d باید از نقطه‌ی وسط AB، یعنی $\left[\frac{-۱+m}{۲} \right]$ بگذرد، پس:

$$\frac{-۱+m}{۲} = ۲ \times ۵ - ۵ \Rightarrow -۱+m = ۱۰ \Rightarrow m = ۱۱$$

۵- گزینه‌ی (۱)

فرض می‌کنیم آقای احمدی x ساعت خوابیده باشد، پس $\frac{۲۲}{۳} - x$ ساعت بیدار بوده است. بنابراین کسری از مسیر که آقای احمدی اتوبوس را

رانده است $\frac{\frac{۲۲}{۳} - x}{۶}$ می‌شود و کسری که آقای سعیدی رانده، $\frac{x}{۸}$ می‌شود، حال داریم:

$$\frac{x}{۸} + \frac{\frac{۲۲}{۳} - x}{۶} = ۱ \Rightarrow ۳x + ۴(\frac{۲۲}{۳} - x) = ۲۴ \Rightarrow -x = ۲۴ - \frac{۸۸}{۳} \Rightarrow x = \frac{۱۶}{۳} = ۵\frac{۱}{۳}$$

۶- گزینه‌ی (۳)

میانگین ریاضی در ابتدا را x فرض می‌کنیم. پس مجموع نمرات دانش‌آموزان $۳۰x$ می‌شود. مجموع نمرات ۲۰ دانش‌آموز قوی‌تر $۲۰(x+۲)$ می‌شود و مجموع نمرات ۱۰ دانش‌آموز ضعیف‌تر $۱۰ \times ۱۲ = ۱۲۰$ ، بنابراین:

$$۳۰x = ۲۰(x+۲) + ۱۲۰ \Rightarrow ۱۰x = ۱۶۰ \Rightarrow x = ۱۶$$

۷- گزینه‌ی (۱)

حالت‌های ممکن x و y را می‌نویسیم و از روی آن‌ها اعضای مجموعه را به‌دست می‌آوریم:

$$xy = ۸ \Rightarrow \begin{cases} (x, y) = (۱, ۸), (-۱, -۸), (۸, ۱), (-۸, -۱), (۲, ۴), (-۲, -۴), (۴, ۲), (-۴, -۲) \\ x^y = ۱, ۱, ۸, -\frac{۱}{۸}, ۱۶, \frac{۱}{۱۶}, ۱۶, \frac{۱}{۱۶} \end{cases}$$

پس: $A = \{۱, ۸, -\frac{۱}{۸}, ۱۶, \frac{۱}{۱۶}\}$

۹- گزینه‌ی (۲)

$$\hat{A} = \frac{11.0 - 9.0}{2} = 1.0$$

۱۲- گزینہ (۲)

۱۳- گزینه‌ی (۳)

۱۴- گزینه‌ی (۱)

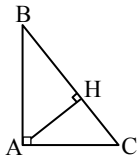
A diagram of a circular sector. A central point is connected to two points on a circular arc by two straight lines, both labeled r . The arc itself is labeled R . A small square symbol is placed at the center point, indicating a right angle between the two radii.

$$A = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi(\underbrace{R^2 - r^2}) = \pi$$

۱۵- گزینه‌ی (۱)

۱۶- گزینه‌ی (۲)

$$b-a \cong (\delta./\imath\imath)^{\imath} - (\delta./\imath\imath)^{\imath} = (\delta./\imath\imath - \delta./\imath\imath) \times (\delta./\imath\imath + \delta./\imath\imath) = ./\imath \times (\imath./\imath\imath) = \imath./\imath\imath$$



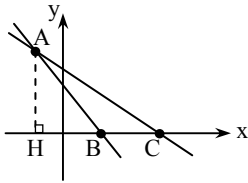
۱۷- گزینه‌ی (۱)

طبق روابط مثلث قائم‌الزاویه برای ارتفاع وارد بر وتر داریم:

$$\left. \begin{aligned} AB^2 &= BH \times BC \\ AC^2 &= CH \times BC \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left(\frac{AB}{AC} \right)^2 = \frac{BH \times BC}{CH \times BC} = \frac{BH}{CH} \Rightarrow x^2 = y$$

۱۸- گزینه‌ی (۱)

ارتفاع AH از مثلث ABC را رسم می‌کنیم. واضح است که $AH = ۱۲$ (طبق مختصات A). حال با توجه به شیب خط‌ها داریم:



$$\left. \begin{aligned} \frac{AH}{BH} &= 2 \Rightarrow BH = 6 \\ \frac{AH}{HC} &= 1 \Rightarrow HC = 12 \end{aligned} \right\} \Rightarrow BC = 12 - 6 = 6 \Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} \times 12 \times 6 = 36$$

۱۹- گزینه‌ی (۴)

$$\begin{aligned} B - A(xA^2 - 3x^2) &= B - A \times x \times (A^2 - 3x) = B - x(x+1)(x^2 + 2x + 1 - 3x) \\ &= (x^4 - 1) - x(x+1)(x^2 - x + 1) = (x^4 - 1) - x(x^2 + 1) \\ &= (x^4 - 1) - (x^4 + x) = -1 - x = -A \end{aligned}$$

۲۰- گزینه‌ی (۳)

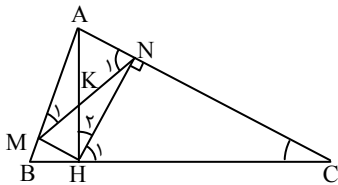
جرم الکل در محلول اولیه برابر $۸ = ۴۰ \times \frac{2}{100}$ گرم و جرم آب $۳۲ = ۴۰ - ۸$ گرم است. جرم الکل در محلول دوم را x و جرم آب را y می‌گیریم، پس در محلول نهایی جرم الکل $۸ + x$ و جرم آب $۳۲ + y$ می‌شود. حال داریم:

$$\text{غلظت محلول دوم} = \frac{1}{3} \times 43\% = \frac{130}{3} \Rightarrow \frac{x}{x+y} = \frac{1}{100} \left(\frac{130}{3} \right) = \frac{13}{3} \Rightarrow 30x = 13(x+y) \Rightarrow 17x = 13y$$

$$\text{غلظت محلول نهایی} = 30\% \Rightarrow \frac{8+x}{8+x+32+y} = \frac{30}{100} \Rightarrow 10(8+x) = 3(40+x+y) \Rightarrow 7x = 3y + 40$$

با حل دستگاه بالا نتیجه می‌گیریم $x = 13$ و $y = 17$ ، پس جرم محلول نهایی $13 + 17 + 40 = 70$ گرم می‌شود.

۲۱- گزینه‌ی (۴)



از این‌که AH قطر دایره است نتیجه می‌گیریم HN و HM بر AC و AB عمودند. چون $\hat{C} = 30^\circ$ ، پس $\hat{H}_1 = 60^\circ$ و در نتیجه $\hat{H}_2 = 30^\circ$. زاویه‌های M_1 و H_2 روبه‌رو به یک کمان‌اند، پس $\hat{M}_1 = 30^\circ$.

از این‌که $\hat{N}_1 = 60^\circ$ و $\hat{M}_1 = 30^\circ$ ، نتیجه می‌گیریم مثلث AMN قائم‌الزاویه است، پس MN نیز قطر دایره است. دو پاره‌خط MN و AH هر دو قطر دایره‌اند، پس K همان مرکز دایره است و داریم $AK = KM$.

۲۲- گزینه‌ی (۱)

عدد را به صورت جمع دو عدد می‌نویسیم:

$$\underbrace{100\dots064}_{1389} = \underbrace{100\dots0}_{1391} + 64 = 10^{1391} + 2^6 = 2^{1391} \times 5^{1391} + 2^6 = 2^6 (2^{1385} \times 5^{1391} + 1)$$

حاصل داخل پرانتز یک عدد فرد است، پس عامل ۲ ندارد و توان ۲ در تجزیه‌ی نهایی همان ۶ می‌شود.

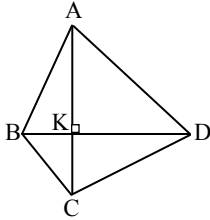
۲۳- گزینه‌ی (۴)

عدد ۱۴۳ می‌تواند عدد نهایی باشد، زیرا $۱۴۳ = ۱۱ \times ۱۳$ و مثلاً وقتی اعداد اول از ۱ تا ۱۵۰ را پیدا می‌کنیم، به عنوان آخرین عدد خط خواهد خورد. گزینه‌های دیگر مانند هم رد می‌شوند، به طور مثال گزینه‌ی (۳) را رد می‌کنیم. اگر قرار باشد عدد $۱۸۷ = ۱۱ \times ۱۷$ عدد نهایی خط‌خورده باشد، باید از مضارب ۱۳ نیز گذشته باشیم (چون $۱۳^2 = ۱۶۹$ و از این گذشته‌ایم). پس ۱۸۷ باید به عنوان مضرب ۱۷ خط‌خورده باشد، در حالی که می‌دانیم این عدد مضرب ۱۱ نیز هست و حتماً در آن بخش خط می‌خورد.

۲۴- گزینهی (۳)

در بین سه گزینهی اول 2^{-18} از همه بزرگتر است، زیرا آن‌ها را می‌توانیم به شکل $(\frac{1}{2})^6$ ، $(\frac{1}{3})^6$ و $(\frac{1}{4})^6$ بنویسیم که در بین این‌ها $(\frac{1}{4})^6$ از همه بزرگتر است (دقت کنید که مثلاً $(\frac{1}{4})^6 = (2^{-2})^6 = 2^{-12} = 3^{-12}$). عدد 2^{-18} از 5^{-9} نیز بزرگتر است، چون $2^{-18} = (\frac{1}{2})^9$ و $5^{-9} = (\frac{1}{5})^9$.

۲۵- گزینهی (۱)

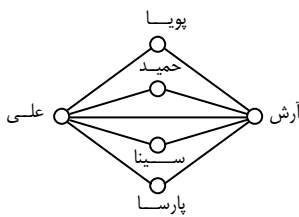


با توجه به شرط $AB^2 - BC^2 = AD^2 - DC^2$ ، قطر BD بر AC عمود می‌شود. پس داریم:

$$\left. \begin{aligned} AB^2 &= AK^2 + KB^2 \\ BC^2 &= KC^2 + KB^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow AB^2 - BC^2 = AK^2 - KC^2$$

$$AK^2 - KC^2 = 48 \Rightarrow (AK - KC)(\underbrace{AK + KC}_{12}) = 48 \Rightarrow \begin{cases} AK - KC = 4 \\ AK + KC = 12 \end{cases} \Rightarrow KC = 4$$

۲۶- گزینهی (۳)



در شکل مقابل افرادی را که با هم دوست‌اند با خط وصل کرده‌ایم. تا این‌جا دوستان آرش و علی مشخص شده‌اند. چون پویا فقط ۲ دوست دارد، دیگر خطی از او خارج نمی‌شود. از طرفی حمید ۳ و سینا ۴ دوست دارند، یعنی باید از حمید یک خط دیگر و از سینا ۲ خط دیگر خارج شود. خط‌های سینا را که رسم کنیم، خود به خود یک خط اضافی حمید تأمین می‌شود. در این صورت پارسا با سینا، آرش و علی دوست است.

۲۷- گزینهی (۳)

عدد وسط را n می‌گیریم. پس سه عدد $n-1$ ، n و $n+1$ هستند و جمع آن‌ها $3n$. حال داریم:

$$3n + 5(n+1) = 2(n-1)^2 + 3 \Rightarrow 8n + 5 = 2n^2 - 4n + 2 + 3 \Rightarrow 12n = 2n^2 \Rightarrow 6n = n^2 \Rightarrow n = 6$$

پس کوچک‌ترین عدد $5 - 1 = 6$ می‌شود.

۲۸- گزینهی (۴)

باقی‌مانده‌ی این عدد در تقسیم بر ۵۶ را r می‌گیریم، پس $a = 56k + r$ (k خارج‌قسمت و a خود عدد است).

چون ۵۶ بر ۷ و ۸ بخش‌پذیر است، باقی‌مانده‌ی a بر ۷ و ۸ با باقی‌مانده‌ی r بر ۷ و ۸ یکسان است. یعنی باقی‌مانده‌ی r بر ۷ برابر ۵ و بر ۸ برابر ۶ است. در بین گزینه‌ها فقط گزینهی (۴) این شرط را دارد.

۲۹- گزینهی (۲)

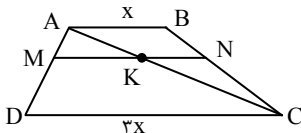
هر کدام از اعداد را به شکل مجموع توانی از ۱۰ و عدد ۱ می‌نویسیم:

$$A = 1 + (1 \cdot 1^1 + 1) + (1 \cdot 1^2 + 1) + \dots + (1 \cdot 1^{51} + 1) = (1 + 1 \cdot 1^1 + 1 \cdot 1^2 + \dots + 1 \cdot 1^{51}) + \underbrace{(1 + 1 + \dots + 1)}_{51 \text{ تا}}$$

حاصل پرانتز اول 110001 می‌شود و حاصل پرانتز دوم ۵۱، پس مجموع نهایی 1000162 می‌شود که مجموع ارقام آن $50 + 6 + 2 = 58$ است.

۳۰- گزینهی (۳)

طول AB را x و طول CD را $3x$ می‌گیریم. با رسم قطر AC دو مثلث ایجاد می‌شود که با استفاده از قضیه‌ی تالس داریم:



$$\left. \begin{aligned} \frac{MK}{DC} &= \frac{AM}{AD} = \frac{1}{3} \Rightarrow MK = \frac{1}{3} \times 3x = x \\ \frac{KN}{AB} &= \frac{NC}{BC} = \frac{2}{3} \Rightarrow KN = \frac{2}{3} \times x = \frac{2}{3}x \end{aligned} \right\} \Rightarrow MN = MK + KN = x + \frac{2}{3}x = \frac{5}{3}x$$

حال با توجه به این که می‌توانیم ارتفاع دوزنقه‌ی ABNM را h و ارتفاع دوزنقه‌ی MNCD را $2h$ فرض کنیم، داریم:

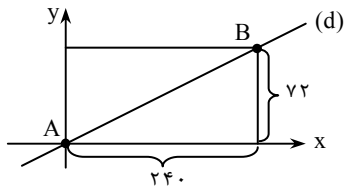
$$\frac{S_{ABNM}}{S_{MNCD}} = \frac{\frac{1}{2}h \times (AB + MN)}{\frac{1}{2} \times 2h \times (MN + CD)} = \frac{x + \frac{5}{3}x}{2(x + \frac{5}{3}x)} = \frac{\frac{8}{3}x}{2 \times \frac{14}{3}x} = \frac{2}{7}$$

۳۱- گزینهی (۳)

داریم $۱۰۰۰ = ۱۰^۳$ و $۳۲^۳ = (۲^۵)^۳ = ۲^{۱۵}$. پس اعداد $۱۱^۳$ ، $۱۲^۳$ ، $۱۳^۳$ ، ... و $۳۱^۳$ اعداد مکعب کامل بین ۱۰۰۱ و $۲^{۱۵} - ۱$ هستند. تعداد این‌ها برابر است با: $۳۱ - ۱۱ + ۱ = ۲۱$

۳۲- گزینهی (۲)

شکل را داخل یک دستگاه مختصات در نظر می‌گیریم، پس معادله‌ی خط d ، $y = \frac{۷۲}{۲۴۰}x$ (یا همان $y = \frac{۳}{۱۰}x$) می‌شود.



نقاط شبکه‌ای روی این خط طول و عرض طبیعی دارند، پس باید تعداد x و y هایی را پیدا کنیم که $y = \frac{۳}{۱۰}x$ و هر دو طبیعی باشند. کافی است که x مضرب ۱۰ باشد، پس مقادیر ممکن برای x عبارت‌اند از:

$$۱۰ \times ۱, ۱۰ \times ۲, ۱۰ \times ۳, \dots, ۱۰ \times ۲۳$$

(دقت کنید که x باید عددی بین صفر و ۲۴۰ باشد). تعداد این نقاط ۲۳ تا است.

۳۳- گزینهی (۲)

توان ۲ و ۳ را در تجزیه‌ی عدد به دست می‌آوریم. توان ۲ در تجزیه‌ی $۲۰!$ برابر است با $۱۰ + ۵ + ۲ + ۱ = ۱۸$ ، و توان ۳ : $۶ + ۲ = ۸$. از طرفی چون $۲ \times ۳^۲ = ۱۸$ ، در نهایت داریم:

$$۱۸ \times ۲۰! = ۳^{۱۸} \times ۲^{۱۹} \times \dots$$

که توان بقیه‌ی عوامل را حساب نکرده‌ایم. واضح است که عدد بالا بر $۱۳^۹ = (۲^۲ \times ۳)^۹$ بخش پذیر است.

۳۴- گزینهی (۲)

با رنگ کردن سطرها $۴ \times ۲۰ = ۸۰$ خانه را رنگ می‌کنیم. با رنگ کردن ستون‌ها $۵ \times ۲۰ = ۱۰۰$ خانه را رنگ می‌کنیم که چون در هر ستون ۴ خانه‌اش قبلاً رنگ شده، باید $۵ \times ۴ = ۲۰$ خانه را کم کنیم (زیرا اضافه حساب کرده‌ایم). هم‌چنین با رنگ کردن قطر اصلی ۲۰ خانه را رنگ می‌کنیم که چون هر سطر و هر ستونی یک خانه با این قطر مشترک دارد، ۷ خانه را قبلاً حساب کرده‌ایم و حالا نباید حساب کنیم. یعنی روی هم $۱۷۳ = ۸۰ + ۱۰۰ - ۲۰ + ۲۰ - ۷$ خانه را رنگ زده‌ایم.

۳۵- گزینهی (۳)

عدد مورد نظر $۲^۶ \times ۳^۷ \times ۵^۲$ است. هر مقسوم‌علیه به شکل $۲^a \times ۳^b \times ۵^c$ است که برای مربع کامل بودن آن داریم:

- a حالت $۴ \rightarrow ۰, ۲, ۴, ۶$ حالت‌های ممکن
b حالت $۴ \rightarrow ۰, ۲, ۴, ۶$ حالت‌های ممکن
c حالت $۲ \rightarrow ۰, ۲$ حالت‌های ممکن

پس روی هم $۴ \times ۴ \times ۲ = ۳۲$ مقسوم‌علیه با این ویژگی داریم.

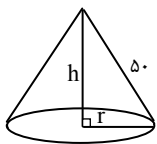
۳۶- گزینهی (۴)

طول منحنی کمان ۲۱۶° ، برابر $\frac{۲۱۶}{۳۶۰} = \frac{۳}{۵}$ محیط دایره‌ای به شعاع ۵۰ است، یعنی برابر $\frac{۳}{۵} \times (۲\pi \times ۵۰) = ۶۰\pi$.

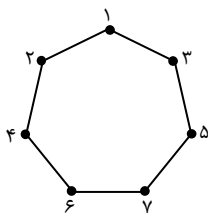
حال این منحنی پس از جمع شدن در مخروط، تبدیل به محیط دایره‌ی قاعده می‌شود. بنابراین:

$$۲\pi r = ۶۰\pi \Rightarrow r = ۳۰$$

$$h = \sqrt{۵۰^۲ - ۳۰^۲} = ۴۰ \Rightarrow V = \frac{۱}{۳}\pi r^2 h = \frac{۱}{۳}\pi \times ۳۰^۲ \times ۴۰ \approx ۳۶۰۰۰$$

**۳۷- گزینهی (۱)**

برای آن که عدد a کوچک‌تر شود، باید اعداد روی رئوس مجاور به هم نزدیک‌تر باشند. پس بهتر است تا جایی که ممکن است ۱ و ۷ از هم دور باشند. با چنین جای‌گذاری‌ای می‌توانید به پاسخ $a = ۲$ برسید.



۳۸- گزینه‌ی (۲)

- هر مثلث به مساحت واحد یا دو رأسش روی ردیف (۱) است یا روی ردیف (۲). دو رأسی که روی یک ردیف هستند باید از هم ۲ واحد فاصله داشته باشند که برای آن ۳ حالت داریم؛ پس روی هم 3×2 حالت برای انتخاب این دو رأس داریم. از طرفی اگر مثلاً در نقطه‌ی A و B، دو رأس در یک ردیف باشند، رأس C، ۵ حالت دارد (هر کدام از نقاط ردیف (۱)). یعنی روی هم $3 \times 2 \times 5 = 30$ مثلث داریم.
- (۱) • • • • •
(۲) • — A — B •

۳۹- گزینه‌ی (۱)

چون سه عدد فرد ۱، ۳ و ۵ در عبارت موجودند، هر طور که عددها را با هم جمع و تفریق کنیم، حاصل نهایی یک عدد فرد است. پس آرش هیچ‌گاه نمی‌تواند اعداد ۲ و ۴ را تولید کند. ولی عدد ۳ را به شکل زیر می‌تواند تولید کند، یعنی حداکثر ۱ امتیاز می‌گیرد.

$$1 + 2 - 3 + 4 + 5 - 6 = 3$$

۴۰- گزینه‌ی (۳)

هر عددی را با استفاده از نمایش آن در مبنای ۲ می‌توانیم به شکل مجموع تعدادی از توان‌های ۲ بنویسیم، مثلاً $19 = 2^4 + 2^1 + 2^0$ (زیرا $19 = 10011_2$). اعداد طبیعی تا ۵۰ را می‌توانیم با ۶ رقم در مبنای ۲ بنویسیم (زیرا $2^5 = 32$ و $2^6 = 64$ ، پس $2^5 < 50 < 2^6$). یعنی میوه‌فروش می‌تواند با ۶ وزنه‌ی ۱، ۲، ۴، ۸، ۱۶ و ۳۲ کیلویی هر عدد طبیعی تا ۵۰ (و در اصل تا ۶۳) را وزن کند.