



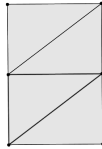
دومین المپیاد هندسه ایران
شهریور ۱۳۹۴

فهرست مطالب

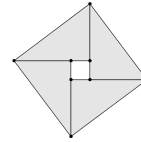
۱	سوالات سطح مقدماتی
۲	سوالات سطح متوسط
۳	سوالات سطح پیشرفته
۴	پاسخ‌های سطح مقدماتی
۱۱	پاسخ‌های سطح متوسط
۲۱	پاسخ‌های سطح پیشرفته

آزمون المپیاد هندسه (سطح مقدماتی)

۱. چهار مثلث چوبی مساوی با اضلاع ۳ و ۴ و ۵ داریم. با استفاده از این چهار مثلث، چه تعداد چندضلعی محدب می توان ساخت؟ نیازی به اثبات نیست و تنها کافی است چندضلعی های موردنظر را رسم کنید.
چندضلعی محدب به چندضلعی ای گفته می شود که درون آن هیچ حفره و سوراخی نباشد و هیچ یک از زوایای آن بیشتر از 180° درجه نباشد. برای مثال:



این چند ضلعی محدب است



این چندضلعی محدب نیست

مهدی اعتصامی فرد

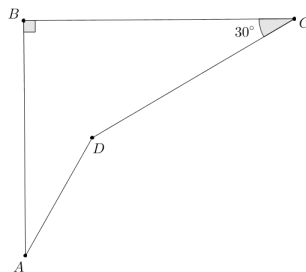
۲. در مثلث ABC زاویه رأس A برابر با 60° درجه می باشد. نقاط M ، N و K به ترتیب روی اضلاع BC ، CA و AB مثلث قرار دارند به طوری که $NC = MN = KM = BK$ شده است. اگر بدانیم $AN = 2AK$ است، مقدار زوایای رأس های B و C را بدست آورید.

مهدی اعتصامی فرد

۳. مطابق شکل زیر زاویه ABC قائمه است و داریم:

$$CD = AB, \quad BC = 2DA, \quad \angle BCD = 30^\circ$$

ثابت کنید زاویه BAD مساوی 30° درجه خواهد بود.



مرتضی ثقفیان

۴. در مستطیل $ABCD$ نقاط P ، Q ، N و M به ترتیب روی اضلاع DA ، CD ، BC و AB طوری انتخاب شده اند که مساحت مثلث های DQP ، CPN ، BNM و AMQ با هم برابر است. ثابت کنید چهارضلعی $MNPQ$ متوازی الاضلاع است.

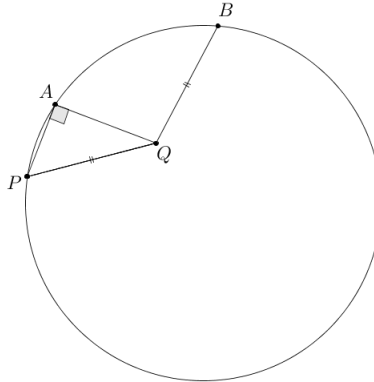
مهدی اعتصامی فرد

۵. آیا می توان ۶ دایره در صفحه رسم کرد به طوری که هر دایره دقیقاً از مرکز ۳ دایره دیگر بگذرد؟

مرتضی ثقفیان

آزمون المپیاد هندسه (سطح متوسط)

۱. نقاط P, A, B روی محیط دایره ای قرار دارند. نقطه Q درون دایره به گونه ای انتخاب شده است که این دو شرط را دارا باشد: $\angle PAQ = 90^\circ$ و $PQ = BQ$. ثابت کنید مقدار تفاضل زوایای AQB و PQA برابر با مقدار کمان AB است.



داوود و کیلی

۲. در مثلث حاده الزاویه ABC ارتفاع BH را رسم می کنیم. نقاط D و E وسط اضلاع AB و AC مثلث می باشند. اگر قرینه نقطه H نسبت به خط DE را F بنامیم، ثابت کنید خط BF از مرکز دایره محیطی مثلث ABC می گذرد.

داوود و کیلی

۳. در مثلث ABC نقاط M, N, K به ترتیب وسط اضلاع BC, CA, AB مثلث هستند. دو نیم دایره روی اضلاع AB و AC مثلث و خارج از مثلث رسم کرده ایم. خطوط MN و MK نیم دایره ها را در نقاط X و Y قطع کرده اند. در نقاط X و Y بر نیم دایره ها مماس رسم کرده ایم تا با یکدیگر در نقطه Z برخورد کنند. ثابت کنید خط ZA بر BC عمود می باشد.

مهدی اعتصامی فرد

۴. فرض کنید ω دایره محیطی مثلث متساوی الاضلاع ABC و O مرکز آن باشد. نقطه P روی کمان BC از دایره ω که شامل رأس A نیست، قرار دارد. مماس در نقطه P بر دایره ω امتداد اضلاع AB و AC را به ترتیب در نقاط K و L قطع می کند. ثابت کنید $\angle KOL > 90^\circ$.

ایمان مقصودی

۵. الف) آیا می توان ۵ دایره در صفحه رسم کرد به طوری که هر دایره دقیقاً از مرکز ۳ دایره دیگر بگذرد؟
 ب) آیا می توان ۶ دایره در صفحه رسم کرد به طوری که هر دایره دقیقاً از مرکز ۳ دایره دیگر بگذرد؟

مرتضی ثقفیان

آزمون المپیاد هندسه (سطح پیشرفته)

۱. دو دایره ω_1 و ω_2 در نقاط A و B متقاطع اند. نقطه X را روی دایره ω_2 در نظر بگیرید. از B بر BX عمودی رسم می کنیم تا دایره ω_1 را در نقطه Y قطع کند. خطی از مرکز دایره ω_1 به X رسم می کنیم تا دایره ω_2 را برای بار دوم در نقطه X' قطع کند. خط $X'Y$ دایره ω_2 را در نقطه K قطع می کند. ثابت کنید نقطه X وسط کمان AK از دایره ω_2 است.

داوود و کیلی

۲. فرض کنید ω دایره محیطی مثلث متساوی الاضلاع ABC و O مرکز آن باشد. نقطه P روی کمان BC از دایره ω که شامل رأس A نیست، قرار دارد. مماس در نقطه P بر دایره ω امتداد اضلاع AB و AC را به ترتیب در نقاط K و L قطع می کند. ثابت کنید $\angle KOL > 90^\circ$.

ایمان مقصودی

۳. نقطه H مرکز ارتفاعی مثلث ABC است. خطوط عمود بر هم l_1 و l_2 از نقطه H می گذرند. خط l_1 ضلع BC و امتداد ضلع AB را در نقاط D و Z قطع کرده و خط l_2 ضلع BC و امتداد ضلع AC را در نقاط E و X قطع می کند. از نقطه D خطی به موازات AC و از نقطه E خطی به موازات AB رسم می کنیم که با یکدیگر در نقطه Y تلاقی می کنند. ثابت کنید نقاط X ، Y و Z هم خط می باشند.

علی گل مکانی

۴. در مثلث ABC شش دایره بدین صورت رسم می کنیم: دایره اول به مرکز رأس A و شعاع AB ، تا ضلع AC را در دو نقطه A_1 و A_2 قطع کند. دایره دوم به مرکز A و شعاع AC تا ضلع AB را در نقاط A_3 و A_4 قطع کند. بقیه نقاط B_1 ، B_2 ، B_3 و B_4 و C_1 ، C_2 ، C_3 و C_4 به همین ترتیب ایجاد می شوند. ثابت کنید اگر ۱۲ نقطه ایجاد شده توسط این دایره ها روی دو دایره قرار داشته باشند، آنگاه مثلث ABC متساوی الساقین است.

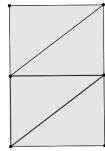
مرتضی ثقفیان

۵. روی اضلاع مثلث ABC و خارج از آن مستطیل های ABA_1B_2 ، BCB_1B_2 و ACA_2C_1 را رسم کرده ایم. نقطه A' را بدین گونه بدست می آوریم که $\angle A_1C_2A' = \angle A_2B_1A' = 90^\circ$. نقاط B' و C' به صورت مشابه تعریف می شوند. ثابت کنید خطوط AA' ، BB' و CC' هم رس هستند.

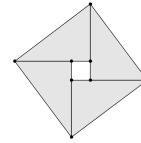
الکسی زاسلاوسکی (روسیه)

پاسخ آزمون المپیاد هندسه (سطح مقدماتی)

۱. چهار مثلث چوبی مساوی با اضلاع ۳ و ۴ و ۵ داریم. با استفاده از این چهار مثلث، چه تعداد چندضلعی محدب می توان ساخت؟ نیازی به اثبات نیست و تنها کافی است چندضلعی های موردنظر را رسم کنید.
چندضلعی محدب به چندضلعی ای گفته می شود که درون آن هیچ حفره و سوراخی نباشد و هیچ یک از زوایای آن بیشتر از 180° درجه نباشد. برای مثال :



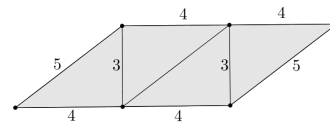
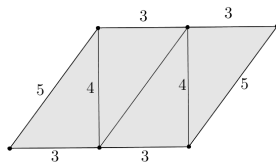
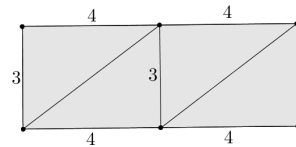
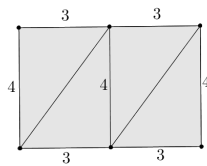
این چند ضلعی محدب است

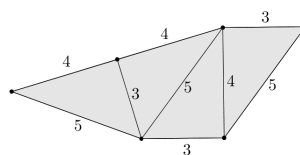
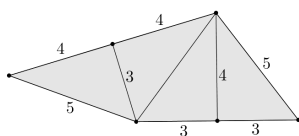
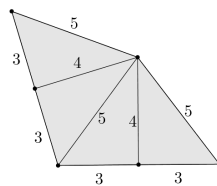
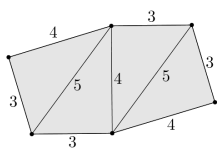
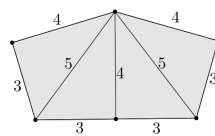
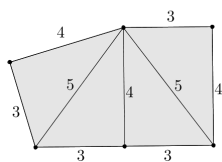
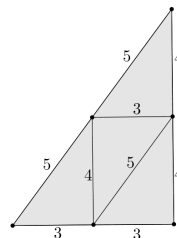
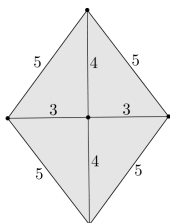
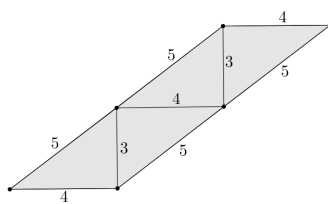
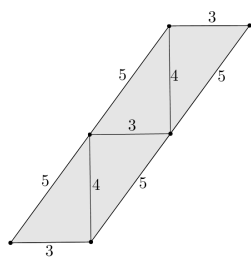


این چندضلعی محدب نیست

مهدی اعتصامی فرد

راه حل.



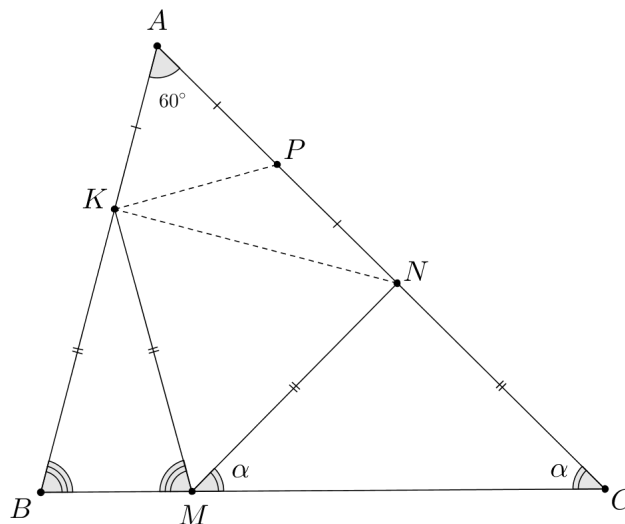


۲. در مثلث ABC زاویه رأس A برابر با 60° درجه می باشد. نقاط M ، N و K به ترتیب روی اضلاع BC ، CA و AB مثلث قرار دارند به طوری که $BK = KM = MN = NC$ شده است. اگر بدانیم $AN = 2AK$ است، مقدار زوایای رأس های B و C را بدست آورید.

مهدی اعتصامی فرد

راه حل.

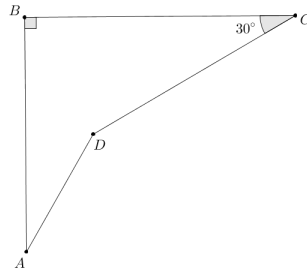
فرض کنید نقطه P وسط ضلع AN باشد. در این صورت $AK = AP = AN$ و در نتیجه مثلث APK متساوی الاضلاع است. بنابراین $\angle ANK = \angle KPA = 30^\circ$. اگر فرض کنیم $\angle ACB = \angle NMC = \alpha$ در این صورت $\angle ABC = \angle KMB = 120^\circ - \alpha$. پس $\angle KMN = 60^\circ$. بنابراین مثلث KMN متساوی الاضلاع است. از طرفی دیگر می دانیم که $\angle MNA = 90^\circ$. بنابراین $\alpha = 45^\circ$. پس مقدار زوایای B و C به ترتیب برابر 75° درجه و 45° درجه بدست می آیند.



۳. مطابق شکل زیر زاویه ABC قائمه است و داریم:

$$CD = AB, \quad BC = 2DA, \quad \angle BCD = 30^\circ$$

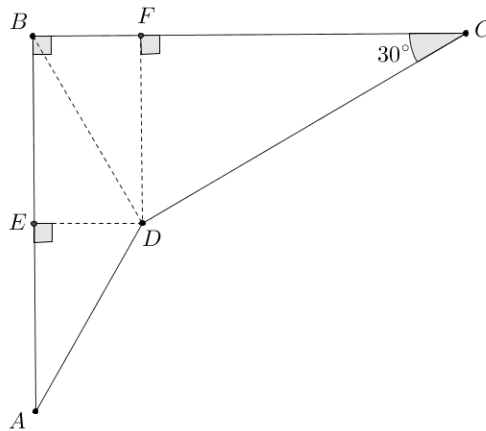
ثابت کنید زاویه BAD مساوی 30° درجه خواهد بود.



مرتضی ثقفیان

راه حل اول.

فرض کنید دو نقطه E و F را روی BC و AB به نحوی انتخاب کنیم که $DF \perp BC$ و $DE \perp AB$. حال نتیجه می گیریم $DF = \frac{DC}{2} = \frac{AB}{2}$ (چرا که $\angle BCD = 30^\circ$ و $\angle DFC = 90^\circ$). علاوه بر این از آنجا که $DF = BE$ ، پس DE عمود منصف AB است. در نتیجه $BD = AD$.



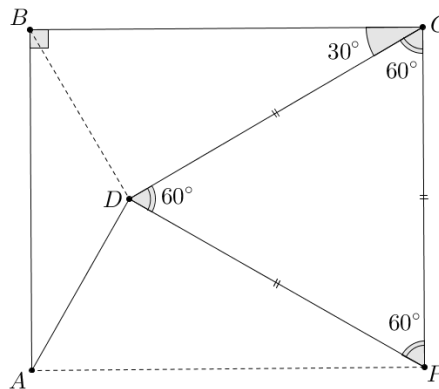
حال فرض کنید H را روی CD طوری انتخاب کنیم که $BH \perp CD$. بنابراین $BH = \frac{BC}{2} = BD$. پس می توان نتیجه گرفت که H بر D منطبق است و $\angle BDC = 90^\circ$. در نتیجه $\angle ABD = \angle BAD = 30^\circ$.

راه حل دوم.

فرض کنید نقطه P را به صورتی انتخاب کنیم که مثلث DCP متساوی الاضلاع باشد. می دانیم که $PC \perp BC$ و $PC = CD = AB$. بنابراین چهار ضلعی $ABCP$ یک مستطیل است. پس:

$$\Rightarrow \angle APD = \angle APC - \angle DPC = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$$

از طرف دیگر می دانیم $AP = BC$ و $DP = DC$. بنابراین مثلث های ADP و BDC با یکدیگر همنهشت اند. بنابراین $AD = BD$.



حال فرض کنید H را روی CD طوری انتخاب کنیم که $BH \perp CD$. بنابراین $BH = \frac{BC}{2} = BD$. پس می توان نتیجه گرفت که H بر D منطبق است و $\angle BDC = 90^\circ$. در نتیجه $\angle ABD = \angle BAD = 30^\circ$.

۴. در مستطیل $ABCD$ نقاط Q, P, N, M به ترتیب روی اضلاع DA, CD, BC, AB طوری انتخاب شده اند که مساحت مثلث های DQP, CPN, BNM, AMQ با هم برابر است. ثابت کنید چهارضلعی $MNPQ$ متوازی الاضلاع است.

مهدی اعتصامی فرد

راه حل.

فرض کنید $AB = CD = a, AD = BC = b$ و $AM = x, AQ = z, PC = y, NC = t$ اگر $x \neq y$ باشد در این صورت می توان فرض کرد که $x > y$ حال داریم:

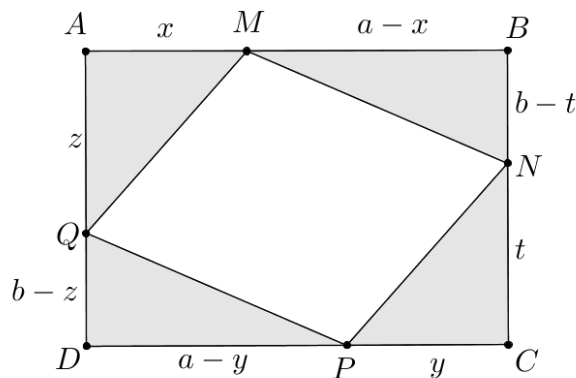
$$y < x \Rightarrow a - x < a - y \quad (1)$$

$$S_{AQM} = S_{CNP} \Rightarrow zx = yt \Rightarrow z < t \Rightarrow b - t < b - z \quad (2)$$

با توجه به نابرابری های ۱ و ۲:

$$(a - x)(b - t) < (a - y)(b - z) \Rightarrow S_{BMN} < S_{DPQ}$$

که نادرست است. پس $x = y$ و در نتیجه $z = t$. پس دو مثلث AMQ و CPN با یکدیگر همنهشت اند. بنابراین $MN = PQ$ به طریق مشابه نتیجه می گیریم $MQ = NP$. بنابراین چهارضلعی $MNPQ$ متوازی الاضلاع است.



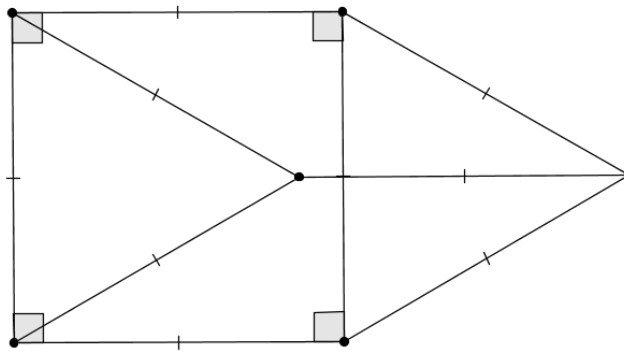
نکته. حکم برای حالتی که $ABCD$ متوازی الاضلاع باشد نیز درست است.

۵. آیا می توان ۶ دایره در صفحه رسم کرد به طوری که هر دایره دقیقاً از مرکز ۳ دایره دیگر بگذرد؟

مرتضی ثقفیان

راه حل.

در تصویر زیر مراکز ۶ دایره مورد نظر رسم شده است. طول تمامی پاره خط های رسم شده برابر ۱ واحد است.



پاسخ آزمون المپیاد هندسه (سطح متوسط)

۱. نقاط P, A و B روی محیط دایره ای قرار دارند. نقطه Q درون دایره به گونه ای انتخاب شده است که این دو شرط را دارا باشد: $\angle PAQ = 90^\circ$ و $PQ = BQ$. ثابت کنید مقدار تفاضل زوایای AQB و PQA برابر با مقدار کمان AB است.

داوود و کیلی

راه حل اول.

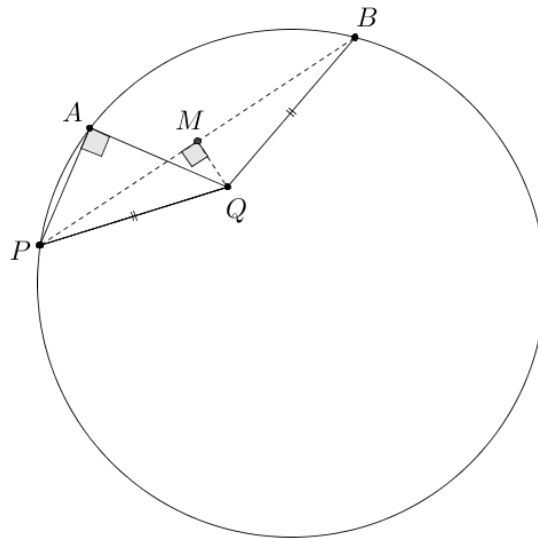
اگر نقطه M وسط پاره خط PB باشد در این صورت زاویه PMQ برابر 90° درجه است. همچنین ما می دانیم که $\angle PAQ = 90^\circ$. بنابراین چهارضلعی $PAMQ$ محاطی است. پس:

$$\angle APM = \angle AQM$$

از طرف دیگر:

$$\angle AQB - \angle AQP = \angle PQM + \angle AQM - \angle AQP = 2\angle AQM$$

بنابراین تفاضل زوایای AQB و PQA برابر با مقدار کمان AB است.



راه حل دوم.

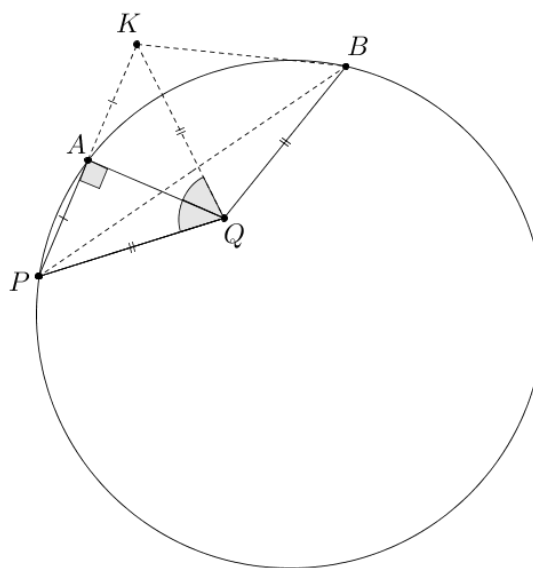
قرینه نقطه P نسبت به AQ را K می نامیم. کافیت نشان دهیم:

$$2\angle APB = \angle AQB - \angle AQP$$

AQ عمود منصف PK است. پس $\angle AQP = \angle AQB$ و $PQ = KQ = BQ$. بنابراین نقطه Q مرکز دایره محیطی PKB است. می دانیم:

$$2\angle APB = \angle KQB = \angle AQB - \angle AQB = \angle AQB - \angle AQP$$

بنابراین تفاضل زوایای AQB و PQA برابر با مقدار کمان AB است.

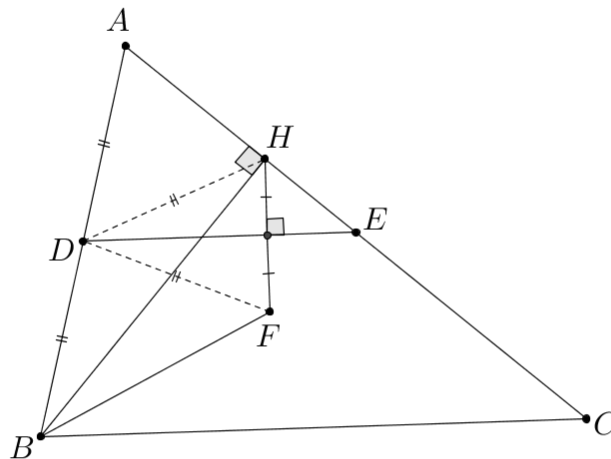


۲. در مثلث حاده الزاویه ABC ارتفاع BH را رسم می کنیم. نقاط D و E وسط اضلاع AB و AC مثلث می باشند. اگر قرینه نقطه H نسبت به خط DE را F بنامیم، ثابت کنید خط BF از مرکز دایره محیطی مثلث ABC می گذرد.

داوود و کیلی

راه حل اول.

فرض کنید O مرکز دایره محیطی مثلث ABC باشد. می دانیم $\angle OBA = 90^\circ - \angle C$. بنابراین کافی است نشان دهیم $\angle FBA = 90^\circ - \angle C$.



می دانیم که $AD = BD = DH$ ، همچنین $DH = DF$. بنابراین چهارضلعی $AHFB$ محاطی است و مرکز دایره محیطی آن D است. پس:

$$\Rightarrow \angle FBA = \angle FHE = 90^\circ - \angle DEH, \quad DE \parallel BC \Rightarrow \angle DEH = \angle C$$

$$\Rightarrow \angle FBA = 90^\circ - \angle C$$

راه حل دوم.

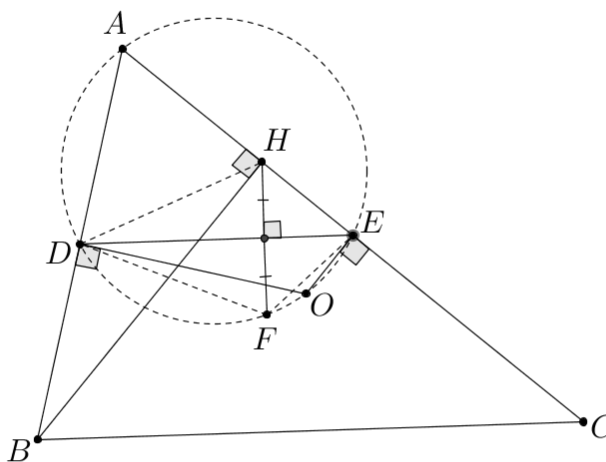
فرض کنید O مرکز دایره محیطی مثلث ABC باشد. می دانیم چهارضلعی $ADOE$ محاطی است و از طرفی دیگر $AD = HD = DB$. بنابراین:

$$\angle A = \angle DHA = 180^\circ - \angle DHE = 180^\circ - \angle DFE$$

پس چهارضلعی $ADFE$ محاطی است. نتیجه می گیریم پنج ضلعی $ADFOE$ محاطی است. بنابراین چهارضلعی $DFOE$ محاطی است. پس داریم:

$$\angle C = \angle DEA = \angle DEF = \angle DOF$$

از طرف دیگر $\angle DOF = \angle DOB$ و $\angle C = \angle DOB$ بنابراین B, F, O و O همخط اند.



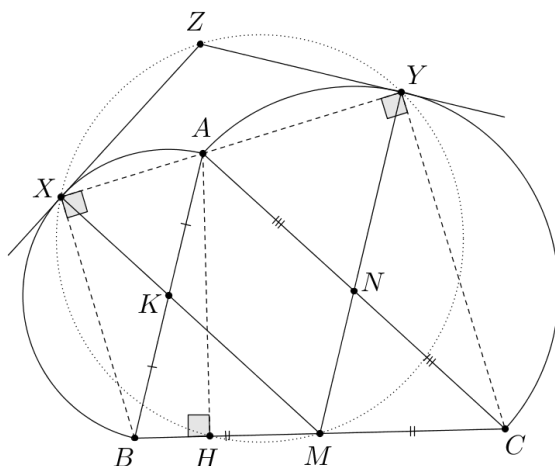
۳. در مثلث ABC نقاط M ، N و K به ترتیب وسط اضلاع BC ، CA و AB مثلث هستند. دو نیم دایره روی اضلاع AB و AC مثلث و خارج از مثلث رسم کرده ایم. خطوط MN و MK نیم دایره ها را در نقاط X و Y قطع کرده اند. در نقاط X و Y بر نیم دایره ها مماس رسم کرده ایم تا با یکدیگر در نقطه Z برخورد کنند. ثابت کنید خط ZA بر BC عمود می باشد.

مهدی اعتصامی فرد

راه حل اول.

نقطه H را روی ضلع BC طوری در نظر بگیرید که $AH \perp BC$. بنابراین چهارضلعی های $AYCH$ و $AXBH$ محاطی اند. واضح است که KM و MN به ترتیب موازی با AC و AB هستند. پس نتیجه می گیریم که $\angle AKX = \angle ANY = \angle A$ ، بنابراین $\angle ABX = \angle ACY = \frac{\angle A}{2}$ و همچنین $\angle XAB = \angle YAC = 90^\circ - \frac{\angle A}{2}$. پس A ، X و Y همخط اند. در نتیجه:

$$\angle AHX = \angle ABX = \frac{\angle A}{2}, \angle AHY = \angle ACY = \frac{\angle A}{2} \Rightarrow \angle XHY = \angle XMY = \angle A$$



بنابراین چهارضلعی $XHMY$ محاطی است. همچنین از آنجا که $\angle MXZ = \angle MYZ = 90^\circ$ نتیجه می گیریم که چهارضلعی $MXZY$ محاطی است. در نتیجه پنج ضلعی $ZXHMY$ محاطی است. بنابراین چهارضلعی $HXXY$ محاطی است. از طرف دیگر:

$$\angle ZYX = \angle ACY = \frac{\angle A}{2}$$

$$\angle ZHX = \angle ZYX = \frac{\angle A}{2}, \angle AHX = \frac{\angle A}{2} \Rightarrow \angle ZHX = \angle AHX$$

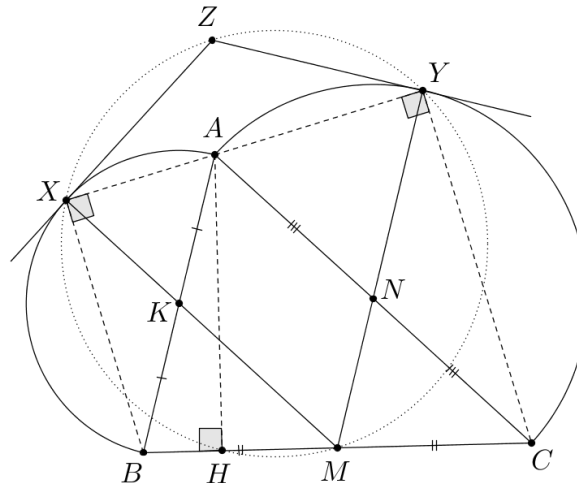
بنابراین نقاط A ، H و Z همخط اند. در نتیجه $AZ \perp BC$.

راه حل دوم.

نقطه H را روی ضلع BC طوری در نظر بگیرید که $AH \perp BC$. واضح است که KM و MN به ترتیب موازی با AC و AB هستند. پس نتیجه می گیریم که $\angle AKX = \angle ANY = \angle A$ ، بنابراین $\angle ABX = \angle ACY = \frac{\angle A}{2}$ و همچنین $\angle XAB = \angle YAC = 90^\circ - \frac{\angle A}{2}$ پس A, X, Y همخط اند.

$$\Rightarrow \angle ZXY = \angle ZYX = \frac{\angle A}{2} \Rightarrow ZX = ZY$$

بنابراین نقطه Z روی محور اصلی این دو نیم دایره قرار دارد. همچنین ما می دانیم که خط AH محور اصلی این دو نیم دایره است. بنابراین نقاط A, Z, H همخط اند. در نتیجه $AZ \perp BC$.



۴. فرض کنید ω دایره محیطی مثلث متساوی الاضلاع ABC و O مرکز آن باشد. نقطه P روی کمان BC از دایره ω که شامل رأس A نیست، قرار دارد. مماس در نقطه P بر دایره ω امتداد اضلاع AB و AC را به ترتیب در نقاط K و L قطع می کند. ثابت کنید $\angle KOL > 90^\circ$.

ایمان مقصودی

راه حل اول.

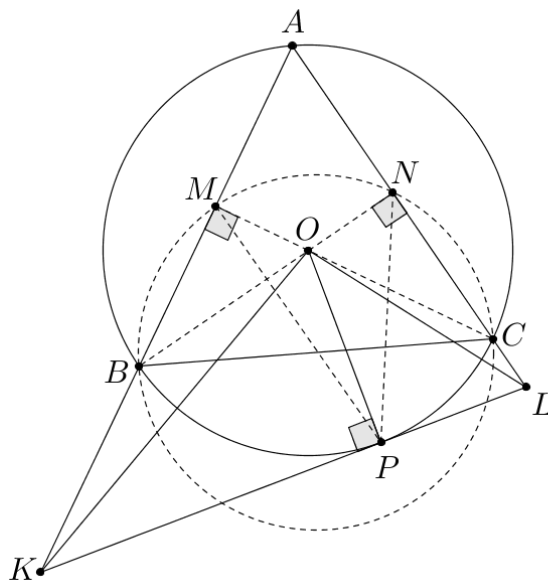
فرض کنید M و N اوساط پاره خط های AB و AC باشند. به وضوح چهارضلعی $BMNC$ محاطی است. علاوه بر آن $\angle BPC = 120^\circ > 90^\circ$. بنابراین نتیجه می گیریم که نقطه P درون دایره محیطی چهارضلعی قرار دارد. پس:

$$\angle MPN > \angle MBN = 30^\circ$$

از طرفی دیگر، چهارضلعی های $KMOP$ و $NOPC$ نیز محاطی هستند. پس داریم:

$$\angle MKO = \angle MPO, \angle NLO = \angle NPO \Rightarrow \angle AKO + \angle ALO = \angle MPN > 30^\circ$$

$$\Rightarrow \angle KOL = \angle A + \angle AKO + \angle ALO > 90^\circ$$



راه حل دوم.

فرض کنید $\angle KOL \leq 90^\circ$ باشد. بنابراین $KL^2 \leq OK^2 + OL^2$. حال فرض کنید R شعاع دایره محیطی مثلث متساوی الاضلاع باشد. اگر فرض کنیم $BK = x$ و $LC = y$ و $AB = AC = BC = a$ در این صورت طبق قضیه کسینوس ها در مثلث AKL خواهیم داشت:

$$KL^2 = AK^2 + AL^2 - AK \cdot AL \cdot \cos(\angle A) \Rightarrow KL^2 = (a+x)^2 + (a+y)^2 - (a+x)(a+y)$$

از طرفی دیگر:

$$KB \cdot KA = OK^2 - R^2 \Rightarrow OK^2 = R^2 + x(a+x)$$

$$LC \cdot LA = OL^2 - R^2 \Rightarrow OL^2 = R^2 + y(a+y)$$

با توجه به $KL^2 \leq OK^2 + OL^2$ و $a = R\sqrt{3}$ داریم:

$$(a+x)^2 + (a+y)^2 - (a+x)(a+y) \leq 2R^2 + x(a+x) + y(a+y)$$

$$\Rightarrow R^2 \leq xy \quad (1)$$

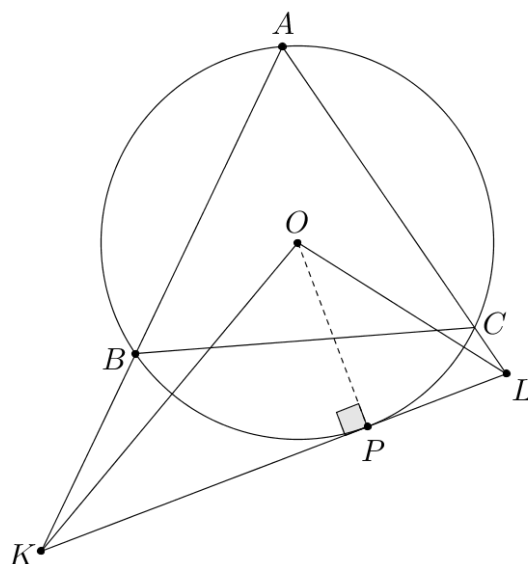
KL بر دایره محیطی مثلث متساوی الاضلاع در نقطه P مماس است. بنابراین داریم:

$$KP^2 = KB \cdot KA = x(a+x) > x^2 \Rightarrow KP > x \quad (2)$$

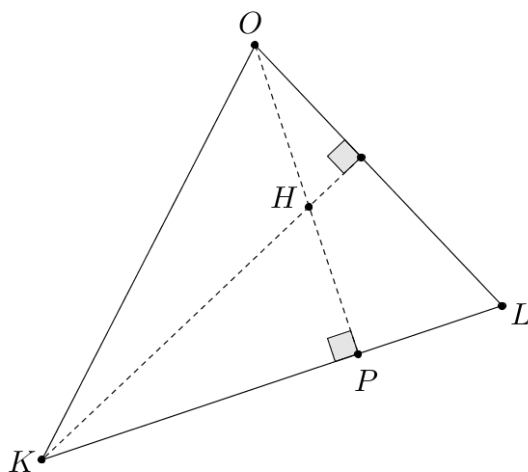
$$LP^2 = LC \cdot LA = y(a+y) > y^2 \Rightarrow LP > y \quad (3)$$

با توجه به نابرابری های ۲ و ۳: $xy < KP \cdot LP \quad (4)$

و بنابر نابرابری های ۱ و ۴: $R^2 < KP \cdot LP \quad (5)$



می دانیم $\angle KOL \leq 90^\circ$. بنابراین مثلث KOL حاده الزاویه است. فرض کنید H مرکز ارتفاعی مثلث KOL باشد. در نتیجه نقطه H روی پاره خط OP قرار دارد و می توان گفت: $HP \leq OP$.



از طرف دیگر $\angle HKP = \angle POL$ و $\angle KHP = \angle OLP$. بنابراین دو مثلث KHP و OPL متشابه هستند. پس داریم:

$$\frac{KP}{HP} = \frac{OP}{LP} \Rightarrow KP \cdot LP = HP \cdot OP \leq OP^2 = R^2$$

اما با توجه به نابرابری ۵، $R^2 < KP \cdot LP$. تناقض حاصل حکم را نتیجه می دهد.

۵. الف) آیا می توان ۵ دایره در صفحه رسم کرد به طوری که هر دایره دقیقاً از مرکز ۳ دایره دیگر بگذرد؟

ب) آیا می توان ۶ دایره در صفحه رسم کرد به طوری که هر دایره دقیقاً از مرکز ۳ دایره دیگر بگذرد؟

مرتضی ثقفیان

راه حل. (الف)

چنین پنج دایره ای وجود ندارند. فرض کنید پنج نقطه با خواص مسئله موجود باشند. پس مراکز آنها پنج نقطه هستند که هر نقطه از ۳ نقطه دیگر فاصله یکسان دارد و از تنها یک نقطه دیگر فاصله متفاوت دارد. از هر نقطه به نقطه ای که با آن فاصله متفاوتی دارد یک فلش می کشیم.

لم ۱. دو نقطه مانند O_i و O_j وجود ندارند که از هر یک به دیگری فلش رسم شده باشد.

اثبات. اگر چنین چیزی وجود داشته باشد در این صورت فاصله O_i از ۳ نقطه دیگر برابر است و فاصله O_j از سه نقطه دیگر هم برابر است. پس هم O_i و هم O_j مرکز دایره محیطی ۳ نقطه دیگر هستند که تناقض است.

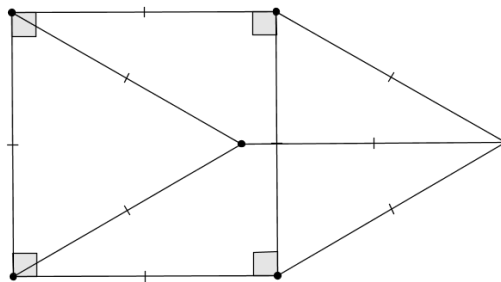
لم ۲. چهار نقطه مانند O_i, O_j, O_k, O_l وجود ندارند که O_i و O_j به O_k فلش داشته باشند و O_k به O_l فلش داشته باشد.

اثبات. اگر چنین چیزی باشد و نقطه دیگر را O_m بنامیم آنگاه فاصله O_i از O_j و O_l و O_m برابر است و فاصله O_j از O_i و O_l و O_m برابر است. در نتیجه O_m باید هر دو به یکدیگر فلش داشته باشند که طبق لم ۱ ممکن نیست.

بنابراین از هر نقطه یک فلش خارج شده و به هر نقطه یک فلش وارد شده است. از لم ۱ می توان نتیجه گرفت که دور ۳ و ۴ رأسی نداریم. پس یک دور جهت دار پنج رأسی داریم. (با رئوس O_i, O_j, O_m, O_k, O_l) پس فاصله O_i از O_k و O_l و O_m برابر است و فاصله O_k از O_i, O_j, O_m برابر است. پس طول $O_i O_m$ با طول $O_i O_k, O_i O_l, O_i O_j$ برابر است. به همین ترتیب می توان گفت که طول همه اضلاع و اقطال این پنج ضلعی باید برابر باشد که ممکن نیست. پس چنین پنج دایره ای وجود ندارند.

(ب)

در تصویر زیر مراکز ۶ دایره مورد نظر رسم شده است. طول تمامی پاره خط های رسم شده برابر ۱ واحد است.



آزمون المپیاد هندسه (سطح پیشرفته)

۱. دو دایره ω_1 و ω_2 به مراکز O_1 و O_2 در نقاط A و B متقاطع اند. نقطه X را روی دایره ω_2 در نظر بگیرید. از B بر BX عمودی رسم می کنیم تا دایره ω_1 را در نقطه Y قطع کند. خط AX دایره ω_2 را برای بار دوم در نقطه X' قطع کند. خط $X'Y$ دایره ω_2 را در نقطه K قطع می کند. ثابت کنید نقطه X وسط کمان AK از دایره ω_2 است.

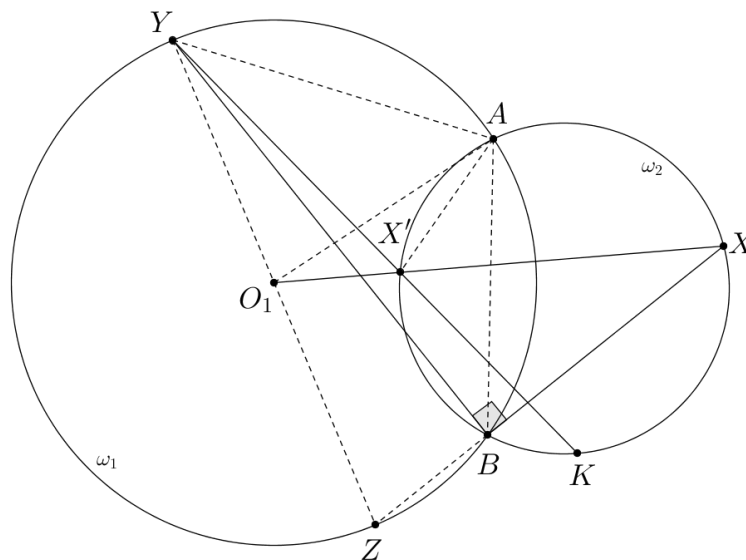
داوود و کیلی

راه حل.

فرض کنید امتداد BX دایره ω_1 را در Z قطع کند. چون $\angle YBZ = 90^\circ$ پس سه نقطه Y, O_1, Z همخط هستند.

$$\angle O_1YA = \angle ABX = \angle AX'X$$

پس $YAX'O_1$ محاطی است. همچنین می دانیم $AO_1 = YO_1$ پس $\angle AX'X = \angle YX'O_1 = \angle XX'K$ در نتیجه نقطه X وسط کمان AK از دایره ω_2 است.



۲. فرض کنید ω دایره محیطی مثلث متساوی الاضلاع ABC و O مرکز آن باشد. نقطه P روی کمان BC از دایره ω که شامل رأس A نیست، قرار دارد. مماس در نقطه P بر دایره ω امتداد اضلاع AB و AC را به ترتیب در نقاط K و L قطع می کند. ثابت کنید $\angle KOL > 90^\circ$.

ایمان مقصودی

راه حل اول.

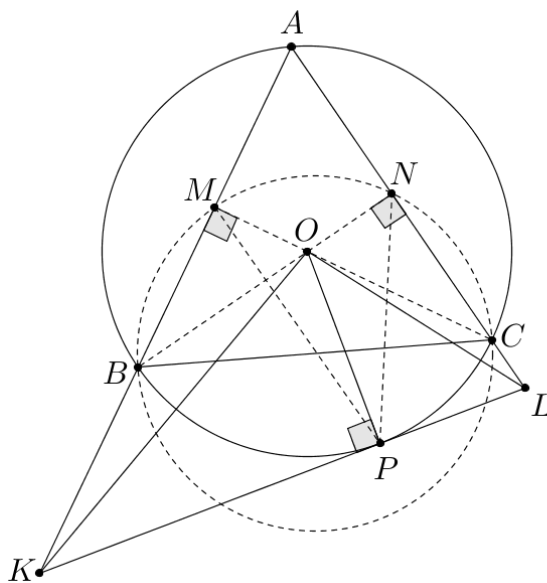
فرض کنید M و N اوساط پاره خط های AB و AC باشند. به وضوح چهارضلعی $BMNC$ محاطی است. علاوه بر آن $\angle BPC = 120^\circ > 90^\circ$. بنابراین نتیجه می گیریم که نقطه P درون دایره محیطی چهارضلعی قرار دارد. پس:

$$\angle MPN > \angle MBN = 30^\circ$$

از طرفی دیگر، چهارضلعی های $KMOP$ و $NOPC$ نیز محاطی هستند. پس داریم:

$$\angle MKO = \angle MPO, \angle NLO = \angle NPO \Rightarrow \angle AKO + \angle ALO = \angle MPN > 30^\circ$$

$$\Rightarrow \angle KOL = \angle A + \angle AKO + \angle ALO > 90^\circ$$



راه حل دوم.

فرض کنید $\angle KOL \leq 90^\circ$ باشد. بنابراین $KL^2 \leq OK^2 + OL^2$. حال فرض کنید R شعاع دایره محیطی مثلث متساوی الاضلاع باشد. اگر فرض کنیم $BK = x$ و $LC = y$ و $AB = AC = BC = a$ در این صورت طبق قضیه کسینوس ها در مثلث AKL خواهیم داشت:

$$KL^2 = AK^2 + AL^2 - AK \cdot AL \cdot \cos(\angle A) \Rightarrow KL^2 = (a+x)^2 + (a+y)^2 - (a+x)(a+y)$$

از طرفی دیگر:

$$KB \cdot KA = OK^2 - R^2 \Rightarrow OK^2 = R^2 + x(a+x)$$

$$LC \cdot LA = OL^2 - R^2 \Rightarrow OL^2 = R^2 + y(a+y)$$

با توجه به $KL^2 \leq OK^2 + OL^2$ و $a = R\sqrt{3}$ داریم:

$$(a+x)^2 + (a+y)^2 - (a+x)(a+y) \leq 2R^2 + x(a+x) + y(a+y)$$

$$\Rightarrow R^2 \leq xy \quad (1)$$

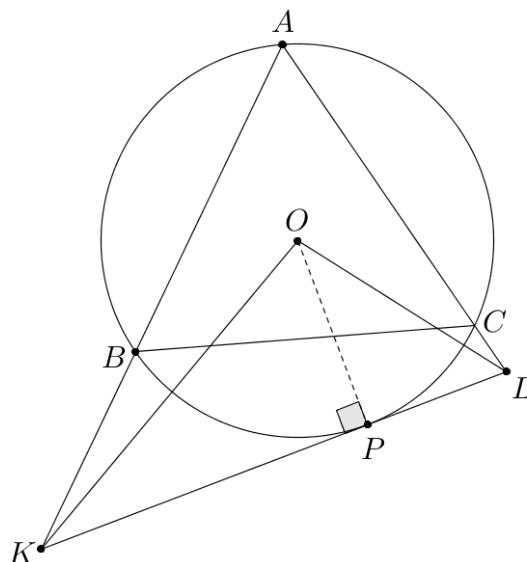
KL بر دایره محیطی مثلث متساوی الاضلاع در نقطه P مماس است. بنابراین داریم:

$$KP^2 = KB \cdot KA = x(a+x) > x^2 \Rightarrow KP > x \quad (2)$$

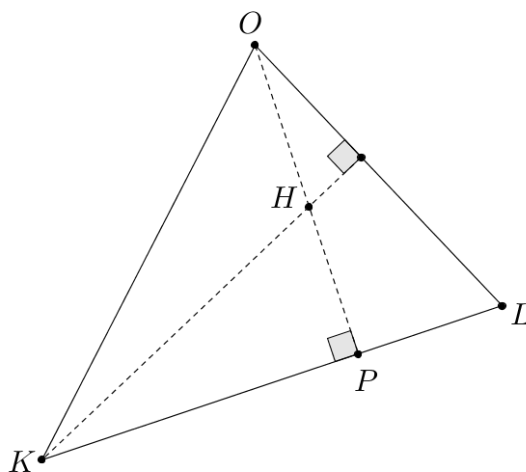
$$LP^2 = LC \cdot LA = y(a+y) > y^2 \Rightarrow LP > y \quad (3)$$

با توجه به نابرابری های ۲ و ۳: $xy < KP \cdot LP \quad (4)$

و بنابر نابرابری های ۱ و ۴: $R^2 < KP \cdot LP \quad (5)$



می دانیم $\angle KOL \leq 90^\circ$. بنابراین مثلث KOL حاده الزاویه است. فرض کنید H مرکز ارتفاعی مثلث KOL باشد. در نتیجه نقطه H روی پاره خط OP قرار دارد و می توان گفت: $HP \leq OP$.



از طرف دیگر $\angle KHP = \angle OLP$ و $\angle HKP = \angle POL$. بنابراین دو مثلث KHP و OPL متشابه هستند. پس داریم:

$$\frac{KP}{HP} = \frac{OP}{LP} \Rightarrow KP \cdot LP = HP \cdot OP \leq OP^2 = R^2$$

اما با توجه به نابرابری ۵، $R^2 < KP \cdot LP$. تناقض حاصل حکم را نتیجه می دهد.

۳. نقطه H مرکز ارتفاعی مثلث ABC است. خطوط عمود بر هم l_1 و l_2 از نقطه H می گذرند. خط l_1 ضلع BC و امتداد ضلع AB را در نقاط D و Z قطع کرده و خط l_2 ضلع BC و امتداد ضلع AC را در نقاط E و X قطع می کند. از نقطه D خطی به موازات AC و از نقطه E خطی به موازات AB رسم می کنیم که با یکدیگر در نقطه Y تلاقی می کنند. ثابت کنید نقاط X ، Y و Z هم خط می باشند.

علی گل مکانی

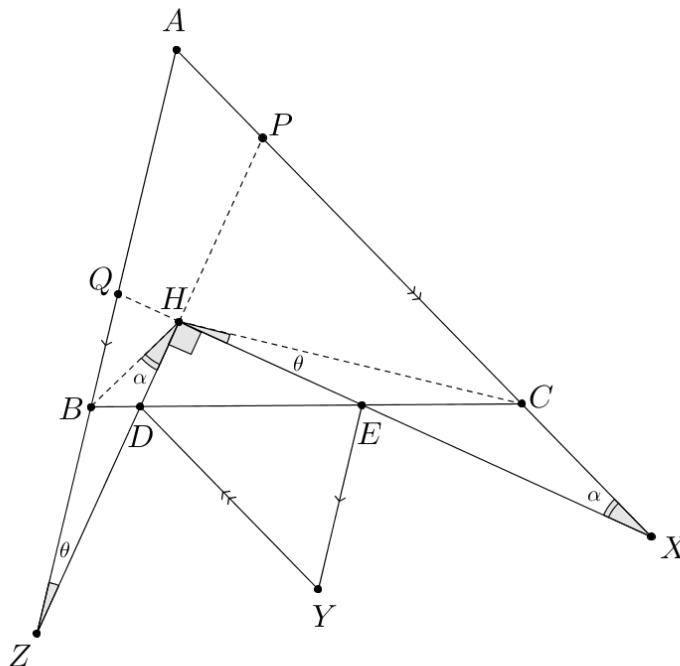
راه حل.

فرض کنید HZ و HX به ترتیب AC و AB را در P و Q قطع کنند. بر اساس قضیه منلائوس در دو مثلث AQX و APZ داریم:

$$\frac{CX}{AC} \cdot \frac{AB}{BQ} \cdot \frac{QE}{EX} = 1 \quad (1)$$

$$\frac{BZ}{AB} \cdot \frac{AC}{PC} \cdot \frac{PD}{DZ} = 1 \quad (2)$$

نقطه H مرکز ارتفاعی مثلث ABC است پس $BH \perp AC$ همچنین می دانیم $\angle DHE = 90^\circ$ در نتیجه $\angle HXA = \angle HZA = \alpha$. به طریق مشابه میتوان نشان داد $\angle HZA = \angle CHX = \theta$.



بر اساس قضیه سینوس ها در سه مثلث HPC و HXC و HPX داریم:

$$\frac{\sin(90^\circ - \theta)}{PC} = \frac{\sin(\angle HCP)}{HP}, \quad \frac{\sin(\theta)}{CX} = \frac{\sin(\angle HXC)}{HX}, \quad \frac{HP}{HX} = \frac{\sin(\alpha)}{\sin(90^\circ - \alpha)}$$

$$\Rightarrow \frac{PC}{CX} = \frac{\tan(\alpha)}{\tan(\theta)}$$

به طریق مشابه بر اساس قضیه سینوس ها در سه مثلث HQZ و HBZ و HBQ داریم:

$$\Rightarrow \frac{BZ}{BQ} = \frac{\tan(\alpha)}{\tan(\theta)} \Rightarrow \frac{BZ}{BQ} = \frac{PC}{CX} \Rightarrow \frac{PC}{BZ} = \frac{CX}{BQ} \quad (3)$$

از روابط ۱، ۲ و ۳ نتیجه می شود:

$$\frac{XE}{EQ} = \frac{PD}{ZD} \quad (4)$$

فرض کنید خطی که از E می گذرد و موازی AB است، ZX را در Y_1 قطع کند و خطی که از D می گذرد و موازی AC است، ZX را در Y_2 قطع کند. بر اساس قضیه تالس خواهیم داشت:

$$\frac{Y_1X}{ZY_1} = \frac{XE}{EQ}, \quad \frac{Y_2X}{ZY_2} = \frac{PD}{ZD}$$

بنابراین Y_1 و Y_2 بر یکدیگر منطبق می باشند. در نتیجه Y روی ZX قرار دارد.

۴. در مثلث ABC شش دایره بدین صورت رسم می کنیم: دایره اول به مرکز رأس A و شعاع AB ، تا ضلع AC را در دو نقطه A_1 و A_2 قطع کند. دایره دوم به مرکز A و شعاع AC تا ضلع AB را در نقاط A_3 و A_4 قطع کند. بقیه نقاط B_1, B_2, B_3, B_4 و C_1, C_2, C_3, C_4 به همین ترتیب ایجاد می شوند. ثابت کنید اگر ۱۲ نقطه ایجاد شده توسط این دایره ها روی دو دایره قرار داشته باشند، آنگاه مثلث ABC متساوی الساقین است.

مرتضی ثقفیان

راه حل اول.

برهان خلف: فرض کنید مثلث متساوی الساقین نباشد. می توان فرض کرد که $a > b > c$. در این صورت روی هریک از خطوط اضلاع مثلث ABC چهارتا از این نقاط قرار میگیرد. پس هریک از دو دایره مذکور اضلاع را در دو تا از این نقاط قطع می کند و رئوس مثلث ABC هم بین این نقاط نیست. حال حاصل ضرب قوت های A نسبت به این دو دایره را در نظر بگیرید. این حاصل ضرب برابر است با فواصل A تا چهار نقطه روی خط AB و از طرفی برابر است با حاصل ضرب تا چهار نقطه روی خط AC . بنابراین:

$$b.b.(a-c).(a+c) = c.c.(a-b)(a+b) \\ \Rightarrow b^2(a^2 - c^2) = c^2(a^2 - b^2) \Rightarrow a^2(b^2 - c^2) = 0 \Rightarrow b = c$$

در حالی که در ابتدا فرض کردیم $b > c$ که این تناقض است. تناقض حاصل نشان می دهد که مثلث ABC متساوی الساقین است.

راه حل دوم.

برهان خلف: فرض کنید مثلث متساوی الساقین نباشد. در این صورت روی هریک از خطوط اضلاع مثلث ABC چهارتا از این نقاط قرار میگیرد. پس هریک از دو دایره مذکور اضلاع را در دو تا از این نقاط قطع می کند و رئوس مثلث ABC هم بین این نقاط نیست. در این صورت تعداد تقاطع های هر دایره با مثلث ABC عددی زوج است در حالی که تنها سه تا از این ۱۲ نقطه روی محیط مثلث هستند که عددی فرد است که این تناقض است. تناقض حاصل نشان می دهد که مثلث ABC متساوی الساقین است.

۵. روی اضلاع مثلث ABC و خارج از آن مستطیل های ABA_1B_2 ، BCB_1B_2 و ACA_2C_1 را رسم کرده ایم. نقطه A' را بدین گونه بدست می آوریم که $\angle A_1C_2A' = \angle A_2B_1A' = 90^\circ$. نقاط B' و C' به صورت مشابه تعریف می شوند. ثابت کنید خطوط AA' ، BB' و CC' هم‌مرس هستند.

الکسی زاسلاوسکی (روسیه)

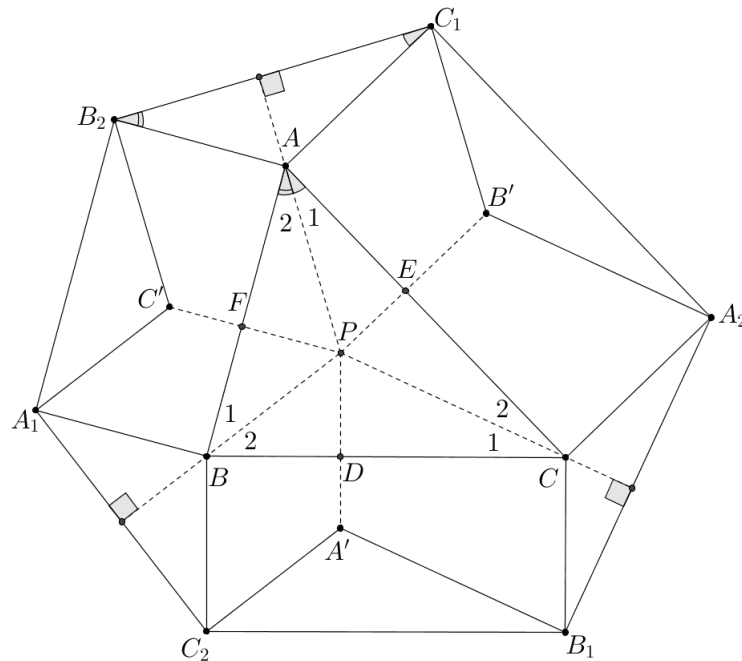
راه حل.

فرض کنید l_A خطی باشد که از A می گذرد و بر B_2C_1 عمود است. به طور مشابه خطوط l_B و l_C را در نظر بگیرید. فرض کنید $CB_1 = BC_2 = x$ و $BA_1 = AB_2 = y$ و $AC_1 = CA_2 = z$. باتوجه به برابری زاویه ها می توان گفت:

$$\frac{\sin(\angle A_1)}{\sin(\angle A_2)} = \frac{y}{z}, \quad \frac{\sin(\angle B_1)}{\sin(\angle B_2)} = \frac{x}{y}, \quad \frac{\sin(\angle C_1)}{\sin(\angle C_2)} = \frac{z}{x}$$

بنابر این بر اساس قضیه سوا سنپوسی در مثلث ABC سه خط l_A, l_B, l_C هم‌مرس هستند. نقطه هم‌رسی این سه خط را P می نامیم. می دانیم: $BC = B_1C_2$ ، $BC \parallel B_1C_2$ ، $CP \parallel A'B_1$ و $BP \parallel A'C_2$ بنابرین دو مثلث PBC و $A'C_2B_1$ هم‌نهشت هستند. در نتیجه:

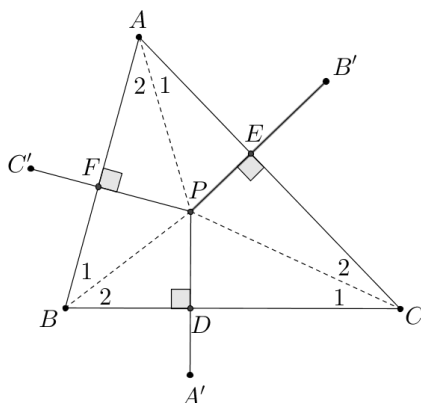
$$PA' = x, \quad PC' = y, \quad PB' = z \quad PA' \perp BC, \quad PB' \perp AC, \quad PC' \perp AB$$



فرض کنید PA' , PB' , PC' به ترتیب AB , AC , BC را در F , E , D قطع کنند و $PD = m$, $PE = t$, $PF = n$. با توجه به شکل قبل داریم:

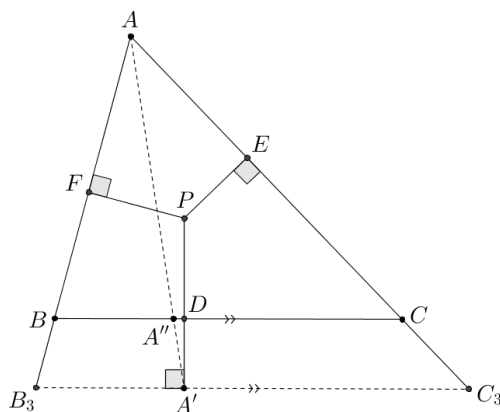
$$\frac{\sin(\angle A_1)}{\sin(\angle A_2)} = \frac{n}{t} = \frac{y}{z}, \quad \frac{\sin(\angle B_1)}{\sin(\angle B_2)} = \frac{t}{m} = \frac{x}{y}, \quad \frac{\sin(\angle C_1)}{\sin(\angle C_2)} = \frac{m}{n} = \frac{z}{x}$$

فرض کنید $n = ky$, بنابراین: $t = kz$, $m = \frac{kyz}{x}$



اکنون از نقطه A' خطی موازی BC رسم می کنیم تا امتداد اضلاع AB و AC را به ترتیب در B_3 و C_3 قطع کند. نقطه A'' تقاطع دوم AA' با BC در نظر بگیرید. بنابر قضیه تالس داریم:

$$\frac{BA''}{CA''} = \frac{B_3A'}{C_3A'}$$



فرض کنید $\angle C_3PA' = \theta$ و $\angle B_3PA' = \alpha$ باشد. می دانیم چهاضلعی های PEC_3A' و PFB_3A محاطی هستند. بنابراین: $\angle C_3EA' = \theta$ و $\angle B_3FA' = \alpha$
بر اساس قضیه سینوس ها در مثلث های PC_3B_3 و PC_3A' و PB_3A' داریم:

$$\frac{B_3A'}{C_3A'} = \frac{\tan(\alpha)}{\tan(\theta)}$$

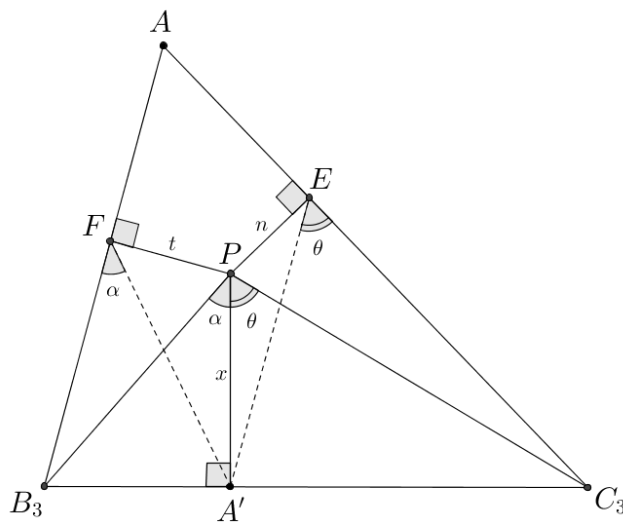
همچنین بر اساس قضیه سینوس ها در مثلث PFA' میتوان گفت:

$$\frac{t}{x} = \frac{\sin(\angle B + \alpha - 90)}{\cos(\alpha)} = \frac{\cos(\angle B + \alpha)}{\cos(\alpha)} = \cos(\angle B) - \tan(\alpha) \cdot \sin(\angle B)$$

$$\Rightarrow \tan(\alpha) = \frac{\cos(\angle B) - \frac{t}{x}}{\sin(\angle B)}$$

به طریق مشابه می توان نشان داد:

$$\tan(\theta) = \frac{\cos(\angle C) - \frac{n}{x}}{\sin(\angle C)} \Rightarrow \frac{B_3A'}{C_3A'} = \frac{BA''}{CA''} = \frac{x \cdot \cos(\angle B) - t \cdot \sin(\angle C)}{x \cdot \cos(\angle C) - n \cdot \sin(\angle B)}$$



نسبت های دیگر به طریق مشابه محاسبه می شوند. برای اثبات حکم بنابر قضیه سوا در مثلث ABC کافی است نشان دهیم:

$$\frac{x \cdot \cos(\angle B) - t \cdot \sin(\angle C)}{x \cdot \cos(\angle C) - n \cdot \sin(\angle B)} \cdot \frac{z \cdot \cos(\angle C) - m \cdot \sin(\angle A)}{z \cdot \cos(\angle A) - t \cdot \sin(\angle C)} \cdot \frac{y \cdot \cos(\angle A) - n \cdot \sin(\angle B)}{y \cdot \cos(\angle B) - m \cdot \sin(\angle A)} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x \cdot \cos(\angle B) - t}{x \cdot \cos(\angle C) - n} \cdot \frac{z \cdot \cos(\angle C) - m}{z \cdot \cos(\angle A) - t} \cdot \frac{y \cdot \cos(\angle A) - n}{y \cdot \cos(\angle B) - m} = 1$$

از طرفی می دانیم:

$$n = ky, \quad t = kz, \quad m = \frac{kyz}{x}$$

با جایگذاری m و n و t در رابطه بدست آمده برای اثبات حکم به رابطه زیر خواهیم رسید:

$$\Leftrightarrow \frac{x \cdot \cos(\angle B) - kz}{x \cdot \cos(\angle C) - ky} \cdot \frac{x \cdot \cos(\angle C) - ky}{x \cdot \cos(\angle A) - kz} \cdot \frac{x \cdot \cos(\angle A) - kz}{x \cdot \cos(\angle B) - kz} = 1$$

که این رابطه بدیهی است. بنابر این حکم اثبات می شود.